

SVEUČILIŠTE
U SPLITU
SVEUČILIŠNI
ODJEL ZA
STRUČNE STUDIJE

FIZIKA

JELENA RUŽIĆ
STJEPAN KNEŽEVIĆ

SKRIPTA

ISBN 978-953-7220-65-5

Split, 2022.

IZDAVAČ

Sveučilište u Splitu
Sveučilišni odjel za stručne studije

AUTORI

Jelena Ružić, predavač
Stjepan Knežević, predavač

RECENZENTI

dr. sc. Mirko Marušić, viši predavač
mr. sc. Zlatko Norac, predavač

LEKTURA I KOREKTURA

izv. prof. dr. sc. Jadranka Nemeth-Jajić

ISBN 978-953-7220-65-5

Odlukom Povjerenstva za izdavačku djelatnost Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Urbroj: 2181-193-111-22-3, ovo djelo se objavljuje kao izdanje Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije.

Sadržaj

1.	Opis fizikalnih veličina	1
1.1.	Fizikalne veličine	1
1.2.	Mjerenje	3
1.3.	Intuitivni i formalni modeli	5
1.3.1.	Dodatak	6
2.	Kinematika	13
2.1.	Opis gibanja	13
2.2.	Položaj, pomak, put, srednja brzina i srednje ubrzanje	14
2.3.	Grafički prikaz kinematičkih veličina	18
2.4.	Trenutačna brzina i trenutačno ubrzanje	20
2.4.1.	Algebarski prikaz kinematičkih veličina (formula)	20
2.4.2.	Ubrzanje pri slobodnom padu	22
2.4.3.	Dodatak	22
2.5.	Rotacija materijalne točke	25
2.5.1.	Nejednoliko kružno gibanje	26
3.	Dinamika	28
3.1.	Što je dinamika?	28
3.2.	Zakoni mehanike	28
3.2.1.	Zakon sile	30
3.2.2.	Ubrzani sustavi	31
3.3.	Rješavanje jednadžbe gibanja	31
3.3.1.	Diferencijalne jednadžbe	31
3.3.2.	Diferencijske jednadžbe	32
4.	Količina gibanja i energija	33
4.1.	Količina gibanja i impuls sile	34
4.2.	Energija i zakon o očuvanju energije	36
4.2.1.	Rad	37
4.3.	Zakon o očuvanju količine gibanja	38
5.	Rotacija krutog tijela	41
5.1.	Kutne veličine	42
5.1.1.	Veze linearnih i kutnih veličina	43
5.1.2.	Inercijska sila u sustavu koji rotira	44
5.1.3.	Kinetička energija rotacije	45

5.1.4. Moment sile.....	46
5.2. Temeljni zakon gibanja za rotaciju krutog tijela.....	46
5.2.1. Kutna količina gibanja.....	47
5.3. Uvjeti ravnoteže krutog tijela.....	48
6. Gravitacija.....	49
6.1. Na leđima divova.....	49
6.1.1. Paralaksa zvijezda.....	49
6.2. Opći zakon gravitacije.....	50
6.3. Primjena zakona gravitacije.....	54
6.3.1. Sateliti.....	55
7. Krute tvari i fluidi.....	57
7.1. Krute tvari.....	57
7.2. Tekućine.....	60
7.3. Plinovi.....	61
8. Titranje.....	65
8.1. Jednostavno harmonijsko gibanje.....	65
Titranje opruge.....	66
8.2. Računanje gibanja tijela na opruzi metodom diferencijalnih jednačina.....	67
Opis pomoću diferencijalnih jednačina.....	67
8.2.1. Energija oscilatora.....	69
8.2.2. Prigušeno gibanje opruge.....	69
8.3. Prisilno titranje i rezonancija.....	70
9. Valovi.....	72
9.1. Vrste valova.....	72
9.1.1. Mehanički valovi.....	72
9.1.2. Elektromagnetski valovi.....	73
9.1.3. Valovi materije.....	74
9.1.4. Model vala.....	74
9.1.5. Jednačina harmonijskog vala.....	75
9.1.6. Interferencija valova.....	76
9.1.7. Refleksija vala.....	76
9.2. Stojni valovi.....	76
9.2.1. Izvod formule za stojni val.....	77
9.3. Zvuk.....	79

9.3.1. Brzina zvuka u fluidu.....	80
9.3.2. Valne pojave povezane sa zvukom.....	81
9.3.3. Promjena impedancije na diskontinuitetu gustoće	81
9.3.4. Zvuk kao varijacija tlaka oko neke srednje vrijednosti	82
9.3.5. Razine jakosti zvuka u decibelima (dB).....	82
9.3.6. Opadanje intenziteta.....	82
9.3.7. Intenzitet (jakost) zvuka	83
9.3.8. Jakost u decibelima (dB).....	84
10. Elektricitet i magnetizam.....	84
10.1. Elektricitet	84
10.2. Magnetsko polje.....	90
10.3. Elektromagnetsko zračenje	93
10.4. Spektar elektromagnetskih valova	94
10.5. Putujući elektromagnetski val	95
10.6. Prikaz elektromagnetskog vala.....	96
11. Svjetlost (optika).....	97
11.1. Geometrijska optika	97
11.2. Zakoni geometrijske optike	98
Kako vidimo stvari?	101
11.3. Kromatična disperzija	102
11.4. Slike	102
11.4.1. Virtualna slika	103
11.4.2. Realna slika.....	104
11.5. Zrcala	104
11.5.1. Jednadžba sfernog zrcala	105
11.5.2. Konstrukcija slike kod konkavnog zrcala	106
11.5.3. Konstrukcija slike kod konveksnog zrcala.....	106
11.6. Leće.....	108
11.6.1. Jednadžba leće	109
11.7. Akomodacija oka	110
11.8. Lupa ili jednostavno povećalo	111
11.9. Mane oka i korekcija pomoću naočala	112
12. Kvantna fizika	114
12.1. Uvod u kvantnu fiziku.....	114

12.2. Planckov zakon zračenja crnog tijela.....	115
12.3. Fotoelektrični efekt	116
12.4. Tunel-efekt	119
12.5. Osnovni fizikalni princip rada lasera.....	120
12.5.1. Stimulirana emisija	120
12.6. Načelo rada lasera	123
12.7. Tipovi lasera.....	125
12.7.1. Podjela lasera	125
12.7.2. Pulsni laseri.....	126
12.7.3. Laseri s čvrstom jezgrom	126
12.7.4. Plinski laseri	127
12.7.5. Poluvodički laseri.....	127
12.7.6. Kemijski laseri.....	127
12.7.7. Laseri s bojilima	128
12.7.8. Laseri sa slobodnim elektronima.....	128
12.8. Primjena lasera.....	128
12.9. Flouescencija.....	129
12.9.1. Luminiscencija – hladno zračenje.....	129
13. Dodatak za laboratorijske vježbe	130
13.1. CoachLab II+.....	130
13.2. Logger Pro.....	132
13.3. Arduino.....	134
13.4. Tracker.....	136
14. Literatura	137

1. Opis fizikalnih veličina

1.1. Fizikalne veličine

Pojave u prirodi opisujemo veličinama koje možemo mjeriti. Svaku veličinu mjerimo posebnom jedinicom, na primjer metar je jedinica za veličinu duljine. Sedam osnovnih fizikalnih veličina usvojeno je 1971. godine. One čine Internacionalni sustav jedinica, skraćeno SI.

Popis osnovnih SI jedinica		
Osnovna veličina	Naziv jedinice	Oznaka jedinice
Duljina	metar	m
Masa	kilogram	kg
Vrijeme	sekunda	s
Jakost električne struje	amper	A
Termodinamička temperatura	kelvin	K
Količina tvari	mol	mol
Jakost izvora svjetlosti	kandela	cd

Slika 1. Popis osnovnih SI jedinica

Definicije osnovnih fizikalnih jedinica:

- Jedinica za duljinu je metar (oznaka m). Metar je dužina puta koju u vakuumu prijeđe svjetlost za $1/299\,792\,458$ sekunda.
- Jedinica za masu je kilogram (oznaka kg). Kilogram je masa međunarodne pramjere mase, koja je izrađena u obliku valjka iz slitine platine i iridija. Pramjera se čuva u Međunarodnom uredu za utege u Sevresu pokraj Pariza.
- Jedinica vremena je sekunda (oznaka s). Sekunda je trajanje $9\,192\,631\,770$ perioda zračenja koje nastaje pri prijelazu elektrona između dviju hiperfinskih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.

- Jedinica jakosti električne struje je amper (oznaka A). Amper je jakost istosmjernje električne struje koja u vakuumu između dvaju ravnih i metar udaljenih beskonačno dugih usporednih vodiča, zanemarujući malog kružnog presjeka, prouzroči silu od $2 \cdot 10^{-7}$ N po metru duljine vodiča.
- Jedinica termodinamičke temperature je kelvin (oznaka K). Kelvin se definira kao 273,16-i dio temperature trojne točke vode.
- Jedinica količine tvari je mol (oznaka mol). Mol predstavlja količinu tvari onog sustava koji sadrži broj jedinki koliko se nalazi atoma u 12 grama ugljika C_{12} . Taj broj naziva se Avogadrov broj i jednak je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Jakost izvora svjetlosti je kandela (oznaka cd). Kandela predstavlja onu svjetlosnu jakost zračenja izvora monokromatskog zračenja frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz koja u danom smjeru iznosi $1/683 \text{ W/sr}$ (vata po steridijanu, steridijan je jedinica za prostorni kut).

Većina se izvedenih SI jedinica definira s pomoću osnovnih jedinica. Tako je SI jedinica za snagu, koja ima naziv vat (watt), oznaka W , definirana s pomoću osnovnih jedinica za masu, duljinu i vrijeme pa vrijedi $W = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$. Slike 2 i 3 prikazuju izvedene mjerne jedinice nastale množenjem i dijeljenjem osnovnih SI jedinica.

Izvedena veličina		Izvedena suvisla SI jedinica	
Naziv	Znak	Naziv	Znak
ploština	A	četvorni metar	m^2
obujam	V	kubični metar	m^3
brzina	v	metar u sekundi	m s^{-1}
ubrzanje	a	metar u sekundi na kvadrat	m s^{-2}
valni broj	σ	recipročni metar	m^{-1}
gustoća, gustoća mase	ρ	kilogram po kubičnome metru	kg m^{-3}
površinska gustoća	ρ_A	kilogram po četvornome metru	kg m^{-2}
specifični obujam	v	kubični metar po kilogramu	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$
gustoća struje	j	amper po četvornome metru	A m^{-2}
jakost magnetskog polja	H	amper po metru	A m^{-1}
množinska koncentracija, koncentracija	c	mol po kubičnome metru	mol m^{-3}
masena koncentracija	ρ, γ	kilogram po kubičnome metru	kg m^{-3}
osvjetljenje	L_v	kandela po četvornome metru	cd m^{-2}
indeks loma	n	(broj) jedan	1
relativna permitivnost	μ_r	(broj) jedan	1

Slika 2. Popis izvedenih jedinica

Izvedena veličina	Izvedena suvisla SI jedinica			
	Naziv	Znak	Izražena pomoću drugih SI jedinica	Izražena pomoću osnovnih SI jedinica
ravninski kut	radijan	rad	1	$m\ m^{-1}$
prostorni kut	steradian	sr	1	$m^2\ m^{-2}$
frekvencija	herc	Hz		s^{-1}
sila	njutn	N		$m\ kg\ s^{-2}$
tlak, naprezanje	paskal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
energija, rad, količina topline	džul	J	$N\ m$	$m^2\ kg\ s^{-2}$
snaga, izračeni tijek	vat	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
električni naboj, količina elektriciteta	kulon	C		$s\ A$
razlika električnih potencijala, elektromotorna sila	volt	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
kapacitet	farad	F	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
električni otpor	om	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
električna vodljivost	simens	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
magnetski tijek	veber	Wb	$V\ s$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
gustoća magnetskog tijeka	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
indukcija	henri	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Celzijeva (Celsiusova) temperatura	Celzijev stupanj	$^{\circ}C$		K
svjetlosni tijek	lumen	lm	$cd\ sr$	cd
osvjetljenje	luks	lx	lm/m^2	$m^{-2}\ cd$

Slika 3. Popis izvedenih jedinica

1.2. Mjerenje

Prilikom istraživanja u fizici prvo se treba uočiti neriješeni problem koji je od znanstvenog interesa. Nakon toga se precizno mjeri. Mjerenja se ponavljaju nekoliko puta kako bi se što je više moguće smanjila pogreška. Rezultati mjerenja se zapisuju i nakon toga slijedi analiza eksperimentalnih podataka, fizikalno objašnjenje eksperimenta i pronalaženje fizikalnih zakona. Mjerenje fizikalnih veličina je uspoređivanje fizikalne veličine koju mjerimo s odgovarajućom standardnom istovrsnom veličinom, tzv. jedinicom. Vrijednost fizikalne veličine piše se kao umnožak broja i jedinice, a broj kojim se množi fizikalna jedinica brojčana je vrijednost veličine izražene tom jedinicom.

Mjerne jedinice često su u praksi ili premale ili prevelike. Npr. u stvarnom životu vrlo se rijetko koristi jedinica farad jer je prevelika. Kondenzatori koje susrećemo u praksi najčešće imaju kapacitet u nanofaradima i pikofaradima. Pri prijenosu električne energije vat je premala

mjerna jedinica pa se tu koristi megavat i kilovat. Radi lakšeg zapisa za tvorbu većih ili manjih mjernih jedinica jedinice se množe decimalnim predmetkom.

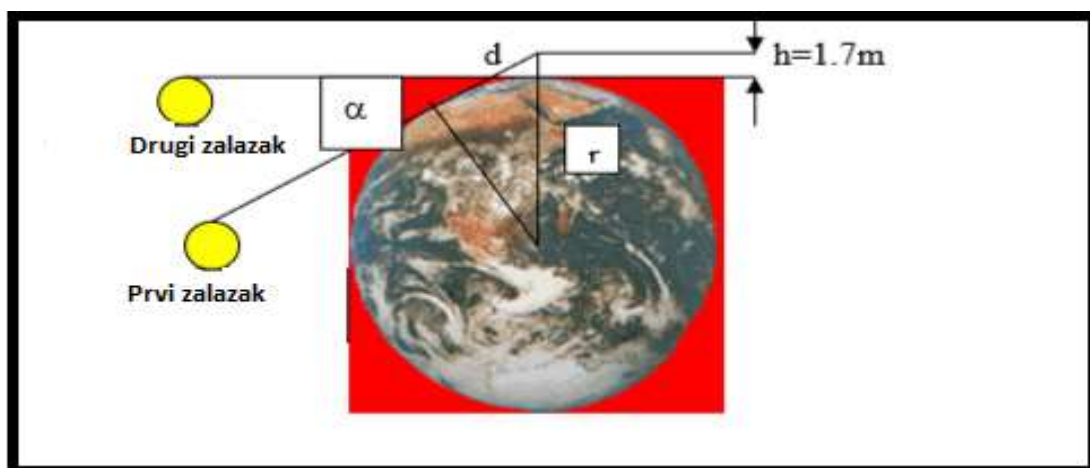
Predmetci su izraženi kao pozitivne ili negativne potencije s bazom 10. Svi predmetci imaju svoje znakove i nazive (slika 4).

Faktor	Naziv	Znak	Faktor	Naziv	Znak
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	eksa	E	10^{-18}	ato	a
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	jota	Y	10^{-24}	jokto	y

Slika 4. Predmetci

Primjer 1.1.

Pretpostavimo da ležite na plaži s otvorenim morem ispred sebe i promatrate zalazak Sunca. Potpuna je bonaca. Štopericu pokrenete u trenutku kad vrh Sunca upravo iščezava na horizontu. Ustajete se podižući oči na visinu od 1,7 metara, ponovno ugledate Sunce i zaustavljate štopericu kad vrh Sunca ponovno iščezne. Ako proteklo vrijeme između tih dvaju događaja iznosi 11 sekunda, koliki je polumjer Zemlje?



Osnovna je zamisao da je vaš pravac gledanja vrha Sunca koje upravo iščezava tangenta na površinu Zemlje. Vaše oči su na površini Zemlje dok ležite, a na visini h iznad površine kad se ustanete, kad linija gledanja čini drugu tangentu na površini Zemlje.

Udaljenost vaših očiju kad ste uspravni i točke u kojoj nova tangenta dodiruje Zemlju označena je slovom d , dok je polumjer Zemlje označen slovom r .

Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 \rightarrow d^2 = 2rh + h^2.$$

Budući da je visina čovjeka zanemariva u odnosu na polumjer Zemlje, član h^2 puno je manji od člana $2rh$, pa vrijedi $d^2 = 2rh$.

Kut između dviju tangenta jednak je kutu koji Sunce prijeđe za 11 sekunda. Tijekom punog

dana Sunce prijeđe puni kut oko Zemlje pa vrijedi razmjer: $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t}{24h} \rightarrow t = 11s$.
 $\alpha = 0,0462^\circ$

Iz slike se vidi da je $\left. \begin{array}{l} d = r \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ d^2 = 2rh \end{array} \right\} \rightarrow r = \frac{2h}{\operatorname{tg}^2 \alpha}.$

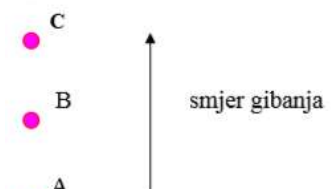
Uvrštavanjem izračunanog kuta α i visine h dobije se polumjer Zemlje $r = 5,2 \cdot 10^6 m$, što je unutar 20 % od prihvaćene vrijednosti.

1.3. Intuitivni i formalni modeli

Izabrane su fizikalne veličine i postupak njihova mjerenja. Kako s pomoću njih opisati pojave u prirodi? Kako su ljudi dio prirode i imaju bogato pojedinačno i kolektivno iskustvo o prirodnim pojavama, nije neobično da imaju određene pretpostavke i hipoteze o tome kako i zašto se ti događaji zbivaju i prije nego što počnu učiti prirodne znanosti u školi. Te, često nesvjesne hipoteze nazivamo intuitivnim modelima. Zadatak koji slijedi primjer je netočne hipoteze da je za gibanje potrebna sila.

Primjer 1.2. Slika prikazuje kuglu bačenu vertikalno prema gore iz točke A. Kugla dostiže točku iznad točke C. B je točka na polovini između A i C ($AB = BC$). Ako se zanemari otpor zraka, koja sila ili sile djeluju na kuglu:

- Sila koja održava gibanje usmjerena prema gore.
- Težina prema dolje i stalna sila prema gore.
- Težina usmjerena prema dolje.
- Težina prema dolje i po iznosu padajuća sila prema gore.
- Sila prema gore, koja djeluje na kuglu od A do neke više točke, nakon koje počinje djelovati težina prema dolje.



Većina će ljudi izabrati odgovor d) ili pak e) jer smatra da se kugla može gibati prema gore samo uz podršku neke sile. Primjer je to intuitivnog modela koji nije u skladu s objašnjenjem fizičara, to jest nije u skladu s formalnim modelom prema kojem se tijela gibaju sama od sebe, a sila je uzrok promjene brzine.

Učenik mora postati eksplicitno svjestan svojih duboko usađenih objašnjenja koja ponekad ne omogućuju dobro predviđanje.

Prihvatit će formalni model, obično izražen jezikom matematike, ako se uvjeri u njegovu veću prediktivnu moć.

Promatranje i mjerenje moraju biti ključan test provjere modela.

Tako provjerene hipoteze nazivamo fizikalnim zakonima. Prije spomenuti primjer gibanja tijela bačenog s površine Zemlje lako se riješi primjenom Newtonova općeg zakona gravitacije.

1.3.1. Dodatak

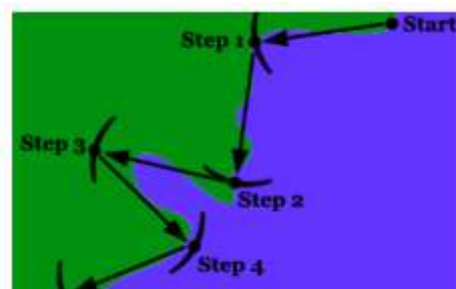
A. Mjerenje fraktala

Koliko je duga obalna crta hrvatskog dijela Jadranskog mora? Slika 5 prikazuje pokušaj određivanja duljine jednog komadića obalne crte koji se nalazi na sjevernoj strani poluotoka Marjana.



Slika 5. Karta Marjana

Mjerenje počinje izborom početne jedinice, štapa duljine 1 metar. Štap se, poput šestara, slaže od početne točke obale te se broji koliko je puta štap sadržan do krajnje izabrane točke obale. Taj broj obilježimo slovom N . Postupak se ponavlja, ali s upola kraćim štapom. Zadnje mjerenje završava sa štapom duljine oko 6 centimetara (slika 7).



Slika 6. Mjerenje s pomoću štapa duljine 1 m

Rezultati mjerenja prikazani su na slici 7.

Duljina mjerila L (cm)	Duljina zakrivljene crte (izmjerena)		Duljina ravne crte (očekivana)	
	N	LN	N	LN
100	5	500	5	500
50	11	550	10	500
25	29	725	20	500
12.5	67	837	40	500
6.25	142	987	80	500
3.1				

Slika 7. Rezultati mjerenja fraktala

Što mislite, je li moguće predvidjeti N (broj štapova) kad bismo mjerili štapom duljine približno 3 cm?

Ako se mjeri ravna crta, moguće je predvidjeti koliki je taj broj jer su dva stupca u tablici vezana relacijom $N \approx \frac{1}{L}$ (mjerenje upola kraćim štapom daje dvostruko veći N) pa bi taj broj bio 160.

Slično mjerenje površine pravilnog lika pokazalo bi da između broja komada jediničnih površina N i veličine te površine L^2 postoji veza iskazana relacijom: $N \approx \frac{1}{L^2}$ (mjerenje dvostruko kraćim štapom daje četiri puta veći N).

Iz slike 7 može se primijetiti da mjerenje zakrivljene crte upućuje na to da će skraćivanje mjerila za polovinu dati više nego dva puta veći N kao za mjerenje ravne crte, ali manje nego četiri puta više kao za mjerenje površine. Zakrivljena crta ima više detalja od ravne crte, ali može ispuniti najviše cijelu ravninu.

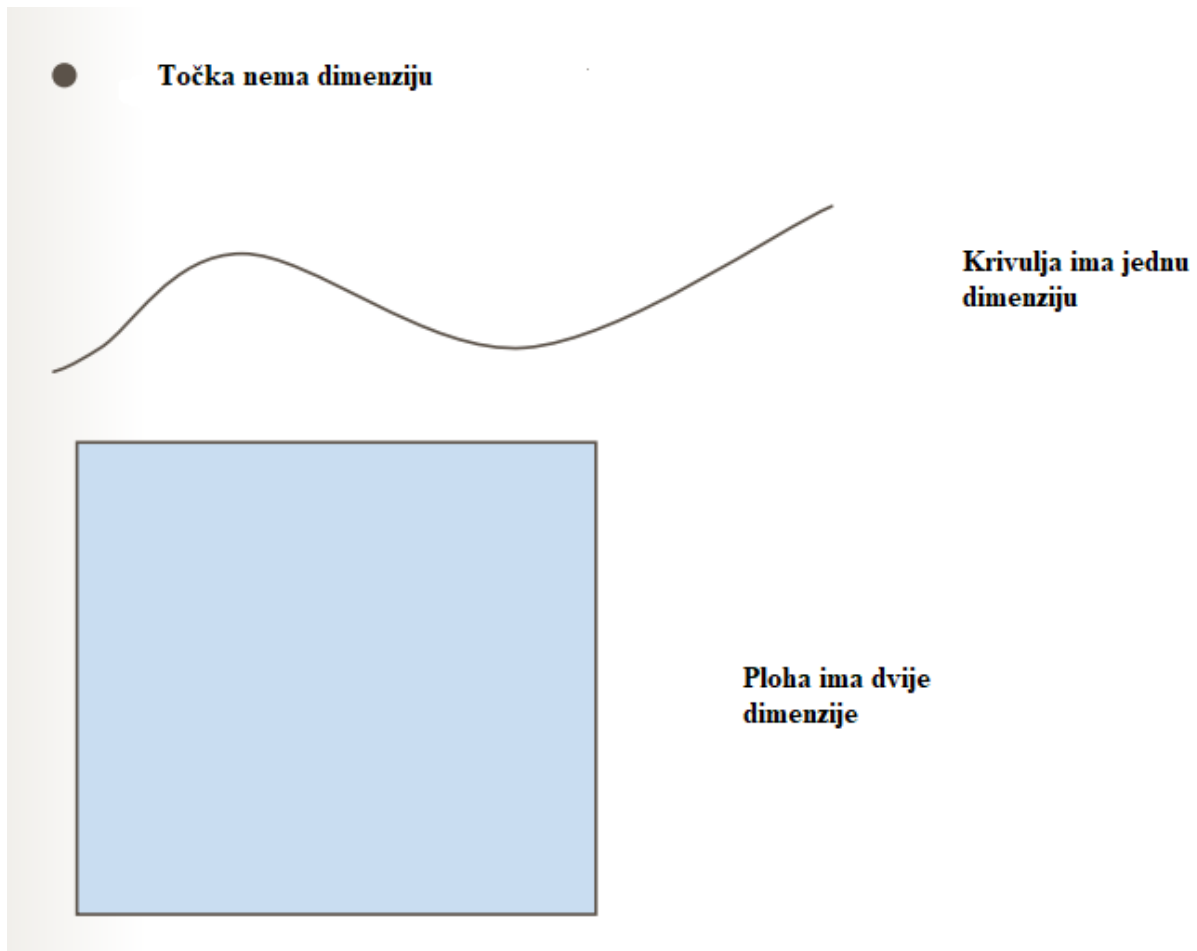
Naslućujemo da je D broj veći od 1, a manji od 2. Kako provjeriti to nagađanje? Dobar je način da se formule koje smo prije napisali logaritmiraju i prikažu grafički:

$$N \approx \frac{1}{L^D} \text{ pa slijedi } N = k \frac{1}{L^D} /^{\log} \rightarrow \log N = \log k + D \log \frac{1}{L}.$$

Ta se jednadžba može shvatiti kao pravac

$y = kx + l$, gdje je $y = \log N$, a $x = \log \frac{1}{L}$, D je nagib pravca (konstanta k određuje izbor početne dužine, npr. 2 m ili 3 m, ako se radi o površini kvadrat od 2 m² ili 3 m²).

Za ravnu crtu $D = 1$, za površinu $D = 2$ (slika 8), a D za zakrivljenu crtu dobije se tako da se prikaže grafički rezultat mjerenja iz naše tablice te očita nagib.



Slika 8. Stupanj slobode pojedinih tijela (svako gibanje tijela i sustava tijela koje je opisano neovisnom (generaliziranom) koordinatom)

Broj D određuje *koeficijent fraktalne dimenzije* nekog geometrijskog skupa. Fraktali su skupovi (poput obalne crte) čija je fraktalna dimenzija razlomljeni broj.

Fraktali pokazuju svojstvo samosličnosti, manji komadići su umanjene verzije (slični su) cijelog objekta.

Budući da imamo formulu koja omogućuje predvidjeti kako broj štapova N ovisi o duljini štapa L , za zakrivljenu crtu $N = 5 \frac{1}{L^{1.23}}$, lako se izračuna da je za $L = 1/32$ m (oko 3 cm)

$N = 342$ komada.

Primjer 1.3. Na slici je prikazana obala nastala nakon desete iteracije (ponavljanja) u računalnoj simulaciji. Duljinu obale izmjerit ćemo polaganjem ravnala različitih duljina L i brojenjem koliko (N) ih treba položiti da se prekrije obala nastala desetom iteracijom. U jednom nizu od četiriju mjerenja dobiveni su rezultati kao u tablici lijevo (duljina mjerila prikazana je i pikselima).



	L (piksel)	N (broj)
1	5	319
2	10	
3	20	50
4	40	20
5	80	8

- a) Izračunajte duljinu obale (u pikselima) u svakom od četiriju mjerenja. Je li duljina obale konstantna? Ako nije, koji je razlog tomu?
- b) Kada biste napravili još jedno mjerenje, s pomoću ravnala duljine 10 piksela, koji bi broj ravnala približno trebalo položiti da se prekrije gore prikazana obala?
- c) Neka je funkcijska ovisnost broja mjerila (ravnala) N o duljini ravnala L dana izrazom $N = k \cdot L^{-D}$. Ako biste podatke iz tablice logaritmizirali, u $(\log L, \log N)$ -grafu prikazali bi se parovi vrijednosti, a te se vrijednosti približno mogu opisati nekom funkcijom (tzv. prilagodba ili "fitanje"). U ovom slučaju vrijednosti parova $(\log L, \log N)$ najbliže se mogu opisati s pomoću pravca. Jednadžba pravca nakon fitanja je
- $$\log N = \log k - D \cdot \log L.$$

Nagib pravca može se približno odrediti s pomoću aritmetičkog izraza: $D \approx \frac{\log N_1 - \log N_5}{\log L_5 - \log L_1}$.

Koristeći se tim izrazom izračunajte broj koji ste trebali približno pogoditi u b) dijelu zadatka. Kako se naziva koeficijent smjera pravca u gornjoj jednadžbi?

Rješenje:

a)

$L \cdot N$ – duljina obale navedena je u tablici za pojedina mjerenja.

Za izračunavanje nepoznatog N uzet je proizvoljno faktor $k = 2,5$. Taj je faktor ovisno o duljini L nešto veći od dva i mijenja se ovisno o duljini metra L .

Traženi podatak za broj mjerenja za $L = 10$ iznosi 127,6.

	L (piksel)	N (broj)	$L \cdot N$
1	5	319	1595
2	10	127,6	1276
3	20	50	1000
4	40	20	800
5	80	8	640

Kao što je već navedeno, nagib pravca približno se određuje s pomoću aritmetičkog izraza

$$D \approx \frac{\log N_1 - \log N_5}{\log L_5 - \log L_1}$$

$$D \approx \frac{\log N_1 - \log N_5}{\log L_5 - \log L_1}$$

$$D \approx \frac{\log 319 - \log 8}{\log 80 - \log 5} = \frac{2,5 - 0,9}{1,9 - 0,699} = \frac{1,6}{1,201} = 1,33$$

Primjer 1.4. Mjerenje najveće koncentracije CO₂ (Keelingova krivulja).

Najveće koncentracije ugljičnog dioksida izmjerene na vulkanu Mauna Loa (Havaji) od 1960. do 1969. godine prikazane su u tablici.

- a) Prikažite podatke iz tablice u (t, c) -grafu (vrijeme t u godinama, a c -koncentracija u ppm (engl. *parts per million*)). Godina 1960. je nulta godina.
- b) Uz pretpostavku linearnog rasta koncentracije s vremenom, podatci se mogu fitati pravcem $c = kt + l$ čiji nagib $k = 1,22$ ppm/god odgovara srednjoj brzini promjene koncentracije ugljičnog dioksida $\Delta c / \Delta t$ (ppm/god.).

N	t (godina)	c (ppm)
1	1960	320,03
2	1961	320,58
3	1962	321,01
4	1963	322,25
5	1964	322,25
6	1965	322,16
7	1966	324,01
8	1967	325
9	1968	325,57
10	1969	327,34

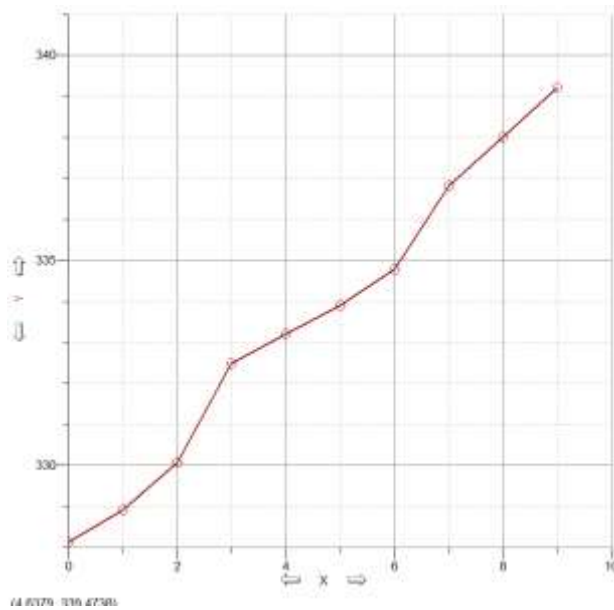
- Napišite jednadžbu pravca ($l = 328,13$ ppm).
- c) Kolika bi bila koncentracija 2016. godine da je nakon 1960. godine koncentracija ugljičnog dioksida rasla linearno s brzinom navedenom u b)?
- d) Kolika je najveća koncentracija ugljičnog dioksida izmjerena 2016. godine ako je 6,4 % veća od one pod c) (linearni rast)?
- e) Fitanjem pedeset i šest najvećih godišnjih koncentracija ugljičnog dioksida u razdoblju

od 1960. pa do 2016. godine s eksponencijalnom funkcijom $y = y_0 + Ae^{\frac{x-x_0}{\tau}}$ dobiju se vrijednosti parametara y_0 , x_0 , A i τ (u ovom slučaju 1960. godina je nulta godina; $t = 0$). Ako se ovisnost koncentracije ugljičnog dioksida (ppm) o vremenu (god.) prikaže funkcijom

$c = 261,09 \text{ ppm} + 45,6 \text{ ppm} \cdot e^{\frac{t+13,58}{59,9}}$, za koliko bi godina (nakon 2016.) koncentracija ugljičnog dioksida bila 50 ppm veća od iznosa u 2016. godini?

Rješenje:

a)



b) $c(t) = 1,22 \cdot t + 328,13$

c) $\Delta t = 56$ godina (vremenski interval)

$$t = 2016 - 1960 = 56$$

$$c(56) = 1,22 \cdot 56 + 328,13$$

$$c(56) = 68,32 + 328,13$$

$$c(56) = 396,45 \text{ ppm}$$

c (koncentracija) je 2016. godine iznosila 396,45 ppm.

d) $c_{\max}(2016) = c_{2016} + \frac{6,4 \cdot c_{2016}}{100} \text{ ppm}$

$$c_{\max}(2016) = 396,45 + \frac{6,4 \cdot 396,45}{100} \text{ ppm}$$

Najveća koncentracija se od 1960. pa do 2016. godine promijenila na vrijednost 420,09 ppm.

$$c_{\max}(2016) = 396,45 + 23,65 \text{ ppm} = 420,09 \text{ ppm}$$

e) $c(t) = 261,09 \text{ ppm} + 45,6 \text{ ppm} \cdot e^{\frac{t+13,58}{59,9}}$

Eksponencijalna funkcija

Koncentraciju u 2016. godini izračunamo tako da izračunamo $c(56)$ (uvrstiti u eksponencijalnu funkciju):

$$c(56) = 261,09 \text{ ppm} + 45,6 \text{ ppm} \cdot e^{\frac{56+13,58}{59,9}}$$

$$c(56) = 261,09 \text{ ppm} + 45,6 \text{ ppm} \cdot e^{1,1616}$$

$$c(56) = 406,78 \text{ (vrijednost koncentracije za 2016. godinu).}$$

Za koliko će godina koncentracija biti za 50 ppm veća od koncentracije u 2016. godini?

$$c(t) = 406,78 \text{ ppm} + 50 \text{ ppm} = 456,78 \text{ ppm}$$

$$t = ?$$

$$456,78 \text{ ppm} = 261,09 \text{ ppm} + 45,6 \text{ ppm} \cdot e^{\frac{t+13,58}{59,9}}$$

$$e^{\frac{t+13,58}{59,9}} = 4,2916 / \ln$$

$$\frac{t+13,58}{59,9} = 1,4566$$

$$t = 73,67$$

Za 73,67 godina od 1960. godine koncentracija će po eksponencijalnom modelu biti veća za 50 ppm, a to će biti $(1960 + 73,67 = 2033,67)$ 2033. godine.

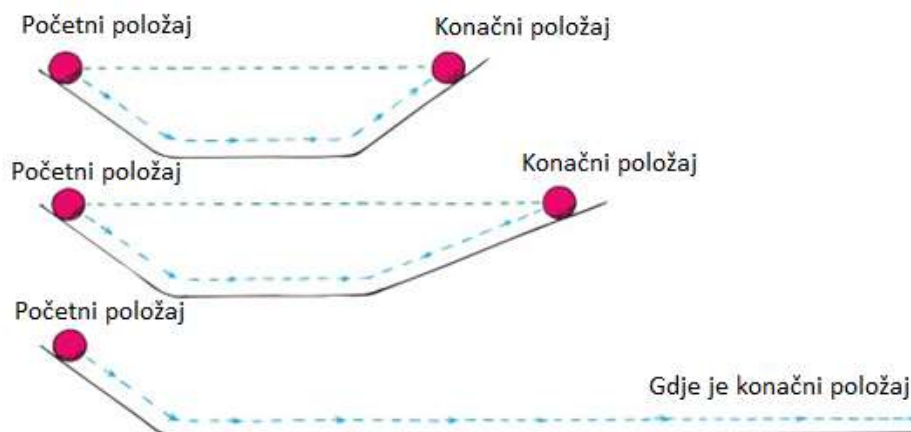
2. Kinematika

2.1. Opis gibanja

Kinematika je dio fizike koji se bavi svrstavanjem i usporedbom gibanja. Pitanje uzroka gibanja ovdje se ne raspravlja. Zanimat će nas ubrzavaju li se tijela, usporavaju ili mijenjaju smjer i kako je to povezano s vremenom. Tijela smatramo materijalnim točkama čiji se svi dijelovi gibaju u istom smjeru istom brzinom.

Aristotel je dijelio gibanja na naravna i prisilna gibanja. Svako tijelo u svemiru ima svoje mjesto, a mirovanje je njegovo normalno stanje ("pravo mjesto"). Tijelo koji se ne nalazi na svojem mjestu teži k njemu gibajući se naravnim gibanjem. Tijelo s naravi zemlje (npr. kamen) teži k zemlji; dim ima narav zraka pa se giba prema gore; perje ima izmiješanu narav zemlje i zraka pa pada na zemlju, ali vrlo sporo. Pritom teža tijela brže dolaze na svoje mjesto, dva puta teže tijelo pada dvostruko brže. Opisano relacijom $v \sim G$. Naravna gibanja mogu biti po pravcu ili po kružnici kao u slučaju nebeskih tijela.

Prisilno gibanje posljedica je sile guranja ili potezanja. Ako je to tako, što gura strijelu kroz zrak? Nije bilo jasno koja sila gura strijelu, pa se izmišljalo zračne vrtloge kao uzrok gibanju. Galileo Galilei u 17. stoljeću osporio je Aristotelovo mišljenje koristeći se znanstvenom metodom: promatranjem pojave, hipotezom ili objašnjenjem i pokusom kao provjerom. Poznat je njegov pokus bacanja tijela različite težine s kosog tornja u Pisi, koja su pala na zemlju za približno isto vrijeme. Prema Galileu, gibanje je normalno stanje tijela. Tijela se gibaju stalnom brzinom dok ne djeluje vanjska sila. Kako je sila trenja uvijek prisutna, dokazao je svoju tvrdnju misaonim pokusom gibanja kugle na glatkoj nizbrdici. U tom eksperimentu Galileo je otkrio da bi se, ako trenje ne bi postojalo, objekti nastavili kretati vodoravno zauvijek, iako ih to nije vratilo na njihovo "pravo mjesto" (slika 9).



Slika 9. Gibanje kuglice po dvjema suprotno okrenutim kosinama. Ako nema trenja, kuglica puštena s jedne kosine (početni položaj) popela bi se na jednaku visinu na drugoj kosini (konačni položaj).

Dok je u Aristotelovu opisu gibanja bitna samo udaljenost tijela od njegova prirodnog mjesta, Galileo je uveo u opis gibanja vrijeme kao novu bitnu fizikalnu veličinu.

Provjera: Koji je bio glavni razlog mišljenju do prije pet stoljeća da se Zemlja ne giba? Prema Aristotelu, Zemlja je na svojem pripadajućem mjestu i da bi ju se pomaknulo s tog mjesta (prisilno gibanje) trebalo bi djelovati silom. Za pomicanje masivnog planeta trebala bi vrlo velika sila koja u to doba nije bila poznata, pa je zaključeno da Zemlja miruje.

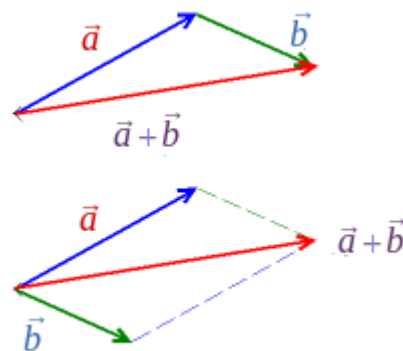
Galileo Galilei osobito je poznat po tome što je u znanost prvi uveo „eksperimentalnu znanstvenu metodu“ napuštajući hrabro pri tome, do tada ustaljeno, Aristotelovo mišljenje da se do otkrića može doći bez eksperimenata i provjere.

2.2. Položaj, pomak, put, srednja brzina i srednje ubrzanje

Prije definiranja položaja, pomaka, puta i brzine treba uvesti pojam vektora.

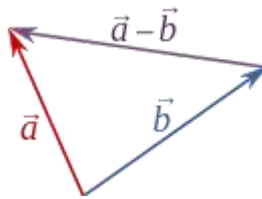
Kartezijev koordinatni sustav (pravokutni koordinatni sustav) jest sustav u prostoru određen trima međusobno okomitim pravcima x , y , z , koji se sijeku u ishodištu O . Pravac x još se zove os apscisa, pravac y os ordinata, a pravac z os aplikata. Vektor je usmjerena dužina kojoj je jedna rubna točka određena za početak, a druga za kraj (završetak). Vektor kojemu je početna točka A , a završna točka B , označujemo \vec{AB} (zbog lakšeg zapisa ubuduće će vektori u tekstu biti napisani podebljanim slovima, npr. vektor $\vec{AB} = \mathbf{AB}$). Svaki vektor ima svoju duljinu, smjer i orijentaciju. Smjer vektora određen je pravcem kojemu vektor pripada. Orijentaciju vektora pokazuje njegova strelica. Duljina vektora \mathbf{AB} jednaka je udaljenosti točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ koja se računa po formuli $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma i po pravilu trokuta (slika 10)



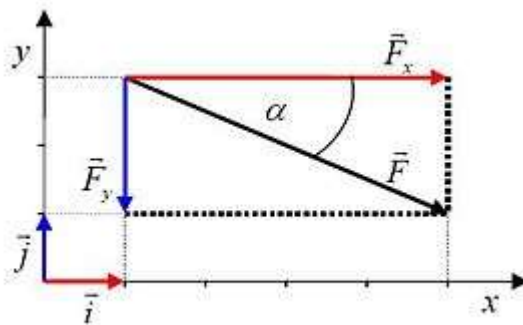
Slika 10. Zbrajanje vektora

Oduzimanje vektora (slika 11)



Slika 11. Oduzimanje vektora

Rastav vektora \vec{F} na komponente u Kartezijevu koordinatnom sustavu (slika 12)



Slika 12. Rastavljanje vektora \vec{F} na komponente u pravokutnom Kartezijevu koordinatnom sustavu

Za mnoge primjene korisno je rastaviti vektorske veličine na komponente u koordinatnom sustavu. Svaki vektor može se prikazati kao zbroj dva ili više vektora. Iz te činjenice proizlazi da vektor \vec{F} u Kartezijevu koordinatnom sustavu možemo razložiti na komponente kako je prikazano na slici 12.

Njegove vektorske komponente su vektori paralelni s koordinatnim osima, \vec{F}_x i \vec{F}_y i tako da je $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$.

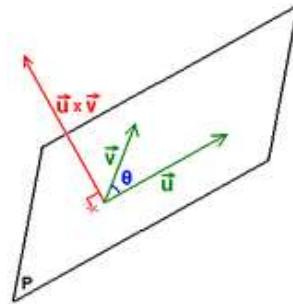
Budući da su paralelne s koordinatnim osima, svaka od tih vektorskih komponenata može se opisati brojem (skalarem), kojim treba pomnožiti jedinični vektor odgovarajuće osi, \vec{i} ili \vec{j} . Jedinični vektor ima iznos jednak jedinici i smjer pripadne osi, pa vrijedi $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$ i $\vec{F}_y = F_y \vec{j}$, a brojevi F_x i F_y zovu se skalarni komponente vektora duž osi x odnosno y .

Vektore možemo množiti na dva načina, skalarno ili vektorski, pa postoji skalarni i vektorski produkt.

Skalarni produkt je operacija koja kao rezultat množenja dvaju vektora daje skalar (broj).

Npr. za vektore \vec{u} i \vec{v} može se skalarni produkt definirati jednostavnim izrazom: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos \vartheta$ (ϑ je kut koji zatvaraju vektori \vec{u} i \vec{v} , dok su u i v duljine vektora).

Vektorski produkt je operacija koja kao rezultat množenja dvaju vektora (npr. vektora \mathbf{u} i \mathbf{v}) daje treći vektor, smjera koji je okomit na smjerove vektora koje množimo, a orijentaciju mu određuje pravilo desne ruke (slika 13). Umnožak (taj treći vektor) piše se kao $\vec{u} \times \vec{v}$, a izos mu je: $|\vec{u} \times \vec{v}| = u \cdot v \cdot \sin \vartheta$.



Slika 13. Množenje vektora

Pravilo desne ruke primijenimo tako da prsti desne ruke idu od vektora \mathbf{u} prema vektoru \mathbf{v} za manji kut, a palac pokazuje vektor $\vec{u} \times \vec{v}$.

Rezultat vektorskog množenja dvaju vektora opet je vektor, a taj se vektor može dalje množiti nekim vektorom. Ako je množenje vektorsko, dobije se trostruki vektorski produkt, npr. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z}$. Vektorsko množenje nije asocijativno pa rezultat ovisi o položaju zagrada. Za razliku od skalarnog množenja, u vektorskom množenju treba paziti i na redoslijed faktora, jer se zamjenom mjesta dobiva vektor suprotne orijentacije (vektorsko množenje je antikomutativno).

Ako se vektorski produkt dvaju vektora pomnoži skalarno s trećim vektorom, dobije se mješoviti produkt, npr. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}$. Apsolutni iznos koji se dobije mješovitim množenjem triju vektora geometrijski se interpretira kao volumen paralelopipeda. Iznos vektorskog produkta je, po definiciji, jednak površini paralelograma kojega određuju vektori koje množimo. Jedinični vektor je vektor jediničnog iznosa i bilo kojega smjera. Jedinični vektor \mathbf{a}_0 vektora \mathbf{a} koji nije nulti vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ jest vektor \mathbf{a} podijeljen sa svojim iznosom $|\mathbf{a}|$, dakle, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a} / |\mathbf{a}|$; ima duljinu jednaku jedan, kolinearan je vektoru \mathbf{a} i ima istu orijentaciju. U Kartezijevu koordinatnome sustavu jedinični vektori \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} usmjereni su uzduž koordinatnih osi x , y i z .

U Kartezijevu koordinatnom sustavu vektorske se operacije izražavaju na sljedeći način. Neka su zadani vektori $\mathbf{a} (a_x, a_y)$ i $\mathbf{b} (b_x, b_y)$, tada vrijedi:

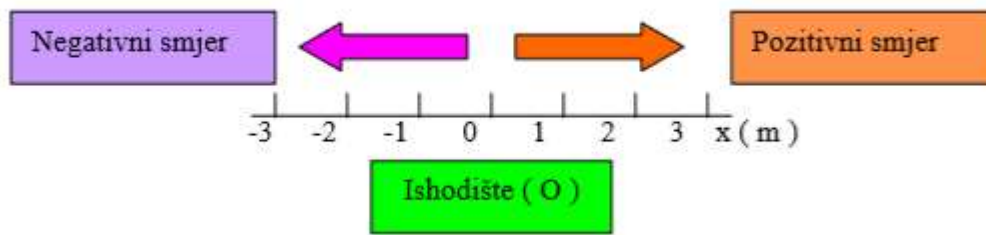
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k},$$

$$t\mathbf{a} = ta_x \mathbf{i} + ta_y \mathbf{j} + ta_z \mathbf{k}, (t \in R),$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

Položaj u jednoj dimenziji određuje se s pomoću osi koja ima ishodište „O“, pozitivan smjer udesno i brojeve (koordinate) koji označavaju duljine u metrima.



Slika 14. Prikaz brojevnog pravca (1 dimenzija)

Položaj tijela u nekom trenutku je udaljenost tijela koje se giba od referentne točke (ishodišta). Položaj najčešće označujemo s x . Promjenu položaja tijela nazivamo *pomak*. Pomak označujemo s Δx . Označimo li s x_1 položaj tijela u početnom trenutku, a s x_2 u konačnom trenutku, tada je pomak jednak:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1.$$

Pomak je vektorska veličina, po iznosu može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. *Put*, koji označujemo sa s , jest duljina staze ili dijela staze.

Zadatak 2.1. Prikažite na osi položaj tijela $x = -2$ m.

Zadatak 2.2. Čovjek se pomaknuo od položaja $x_1 = 3$ m do položaja $x_2 = 8$ m, a zatim se vratio natrag. Koliki je pomak tog čovjeka?

Zadatak 2.3. Čovjek se pomakao od položaja $x_1 = 7$ m do položaja $x_2 = -3$ m. Koliki je pomak tog čovjeka?

Srednju brzinu (v) definiramo kao omjer pomaka i vremena za koje se tijelo pomaknulo:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}.$$

Kako je pomak vektor, a vrijeme skalar koji je uvijek pozitivan, srednja brzina je vektor koji ima isti predznak kao i predznak pomaka. Srednju brzinu možemo definirati i s pomoću promjene puta u nekom vremenskom intervalu:

$$\vec{v} = v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Napomena: ukupni put koji prijeđe čestica nezavisno od smjera kojim se giba uvijek je pozitivan. Srednja brzina koja bi se računala s pomoću omjera ukupnog puta i vremena ima u

engleskom jeziku naziv *average speed* i treba je razlikovati od prije uvedenog vektora srednje brzine koji ima engleski naziv *average velocity*. Hrvatski jezik ta dva pojma ne razlikuje.

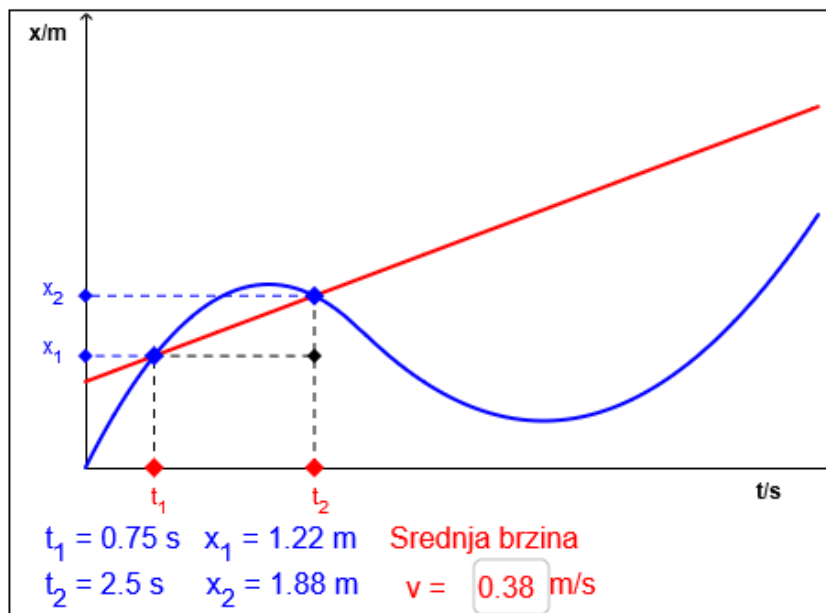
U daljnjem će se tekstu naziv brzine uvijek odnositi na vektor koji se dobije kao omjer pomaka i vremena i koji odgovara engleskom nazivu *velocity*.

Akceleracija ili ubrzanjenje (**a**) je vektorska fizikalna veličina kojom opisujemo ubrzanje ili usporenje tijela. Srednja akceleracija je po iznosu jednaka količniku iznosa promjene brzine i vremenskog intervala u kojem je ta promjena postignuta. Mjerna jedinica akceleracije je metar u sekundi na kvadrat (m/s^2).

2.3. Grafički prikaz kinematičkih veličina

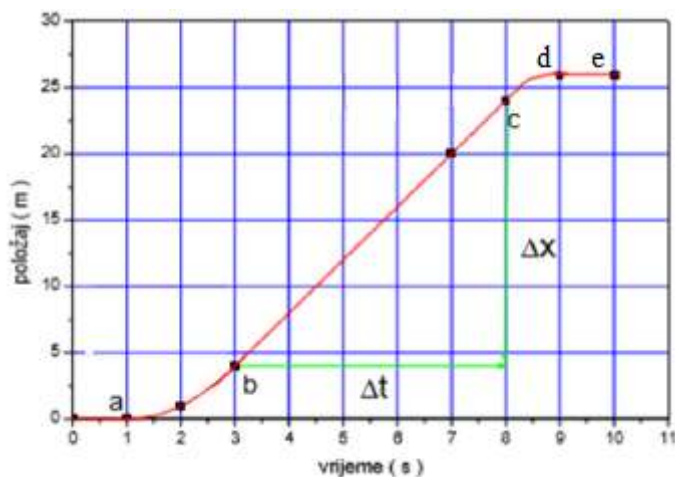
Na grafičkom prikazu položaja x u ovisnosti o vremenu t srednja brzina je nagib pravca koji spaja dvije točke krivulje $x(t)$.

Primjer 2.1. Izračunajte srednju brzinu s donjeg grafa između t_1 i t_2 .



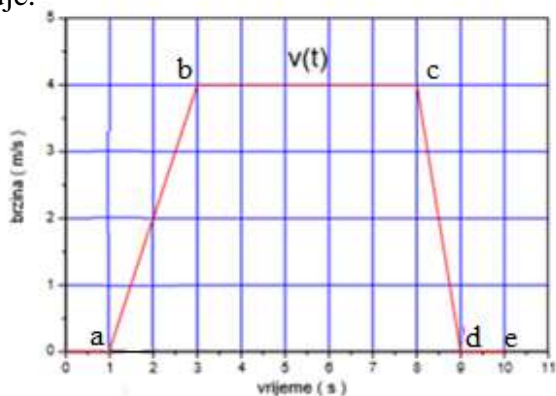
Primjer 2.2.

Donji graf prikazuje položaj dizala koje miruje prvu sekundu, zatim ubrzava dvije sekunde (za $t = 3 \text{ s}$, $x = 4 \text{ m}$), giba se stalnom brzinom do osme sekunde (za $t = 8 \text{ s}$, $x = 24 \text{ m}$), usporava jednu sekundu jednoliko i miruje jednu sekundu. Prikažite (v,t) -graf i (a,t) -graf tog gibanja. Napomena: s obzirom na to da su vektori u jednoj dimenziji, pri računanju se koriste skalarni iznosi vektora.

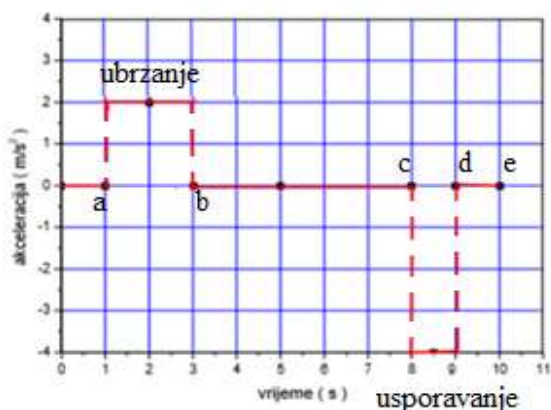


Brzina u nekom trenutku odgovara nagibu krivulje $x(t)$ u tom trenutku.

U prvoj sekundi nagib je nula, pa je i brzina nula (dizalo miruje). Sljedeće dvije sekunde giba se stalnim ubrzanjem. Od treće do osme sekunde giba se stalnom brzinom $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24m - 4m}{8s - 3s} = 4 \frac{m}{s}$. Dizalo jednoliko usporava u devetoj sekundi. U desetoj sekundi dizalo miruje.



nagib pravca $v(t)$ je ubrzanje a



usporavanje

Od 1 s do 3 s:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$4 = \frac{1}{2}a \cdot 4$$

$$a = 2m/s^2$$

$$\Delta v = a \cdot t$$

$$\Delta v = 4m/s$$

Od 8 s do 9 s:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$2 = -\frac{1}{2}a \cdot 1$$

$$a = -4m/s^2$$

$$\Delta v = a \cdot t$$

$$\Delta v = -4m/s$$

Kako iz grafa brzine rekonstruirati graf položaja?

Moguće je dobiti oblik grafa položaja, ali ne i stvarne vrijednosti položaja u različitim trenutcima, jer graf brzine pokazuje samo promjenu položaja Δx kojoj odgovara površina ispod

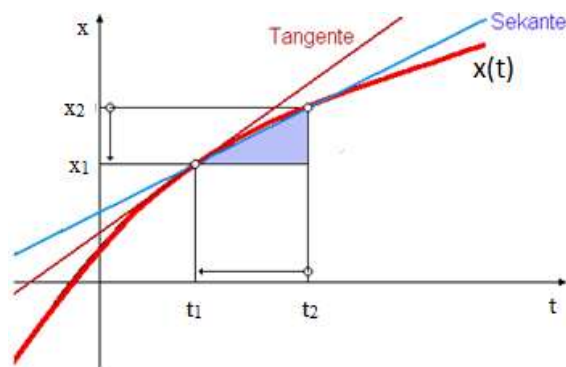
krivulje $v(t)$. Tako bi tijekom vremenskog razmaka od treće do osme sekunde, kada je brzina dizala bila 4 m/s, iznos promjene položaja bio umnožak brzine u vremenskom intervalu:

$$|\Delta \vec{x}| = 4 \frac{m}{s} (8s - 3s) = 20m.$$

Međutim, iz grafa brzine nije moguće odrediti stvarni položaj u odnosu na ishodište sustava. Potreban je dodatni podatak, a to je vrijednost položaja u nekom trenutku.

2.4 Trenutačna brzina i trenutačno ubrzanje

Ako se vremenski razmak u kojem se mjeri promjena položaja (pomak) smanjuje, srednja brzina približava se pravoj ili trenutačnoj vrijednosti brzine v . Kada je taj interval vremena dovoljno mali? Ako promatrate (x,t) -graf i smanjujete vremenski razmak, dobit ćete graf koji vam se čini ravnim. Izračunajte omjer pomaka i vremena i proglasite ga trenutačnom brzinom.



Slika 15. Graf tangente i sekante

U tom postupku sekanta prelazi u tangentu krivulje $x(t)$ (slika 15). Taj se proces opisuje graničnim prijelazom ili limesom brzine:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Trenutačno ubrzanje ili trenutačna akceleracija dobije se kao omjer promjene brzine i vremenskog intervala pri čemu se omjer računa za sve manje vremenske intervale:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}.$$

Velike akceleracije ponekad se izražavaju s pomoću g , gdje je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, akceleracije tijela koje pada blizu površine Zemlje.

2.4.1. Algebarski prikaz kinematičkih veličina (formula)

Između velikog broja različitih gibanja odaberimo gibanje sa stalnim ubrzanjem. U tom je slučaju srednje ubrzanje \bar{a} u svakom trenutku jednako trenutačnom ubrzanju \vec{a} . Ako stoga u

formuli za srednje ubrzanje odaberemo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$ u početnom trenutku $t_1 = 0$, a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ u nekom kasnijem trenutku $t_2 = t$: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = \vec{a}$, tada slijedi $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$.

Slično, $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t} = \vec{v}$, pa slijedi $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t$,

gdje je \vec{v} vrijednost brzine između $t = 0$ i kasnijeg vremena t .

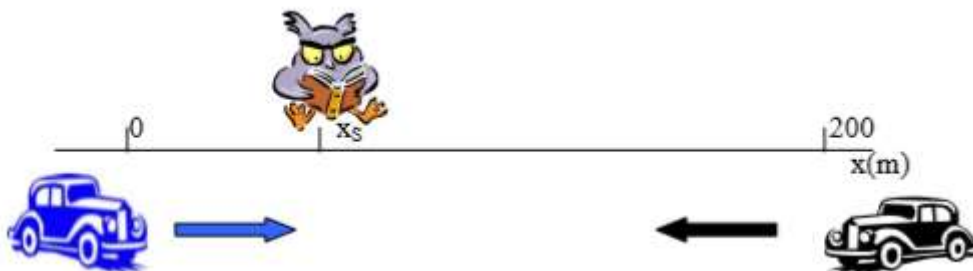
Kako je ubrzanje stalno, a brzina je linearna funkcija vremena (prikazana pravcem), vrijedi $\vec{v} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}$ pa se uvrštavanjem prethodnog izraza za brzinu dobije $\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t$ i konačno položaj je jednak:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2.$$

Ako nas zanimaju samo iznosi brzine, akceleracije ili puta, vrijede iste formule, no tada se umjesto vektorima koristimo skalarima (iznosima zadanih veličina).

Primjer 2.3.

U filmskoj sekvenci dva su automobila udaljena 200 m i voze jedan prema drugom. U trenutku prolaska jednog automobila pored drugoga vozač plavog automobila treba dobaciti paket krijumčarene robe vozaču crnog automobila. U namjeri da snimi dobacivanje paketa, policija mora predvidjeti položaj susreta x_s . Plavi automobil se od položaja kad su automobili udaljeni 200 m ubrzava iz mirovanja s ubrzanjem od $6,12 \text{ m/s}^2$, a crni ima brzinu od 60 km/h i nastavlja se gibati tom brzinom. Koliko će se daleko od početnog položaja plavog automobila dogoditi susret krijumčara?



Osnovna je zamisao da se oba automobila gibaju sa stalnim ubrzanjem, pa se mogu primijeniti formule koje smo upravo izveli. S obzirom na to da se gibanja odvijaju po pravcu, jednadžbe možemo pisati bez korištenja vektora. Početni položaj plavog automobila neka je $x_0 = 0 \text{ m}$, početna brzina $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i $a = 6,12 \text{ m/s}^2$, pa za njega vrijedi jednadžba:

$$x(t) = 0 \text{ m} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2} 6,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2.$$

Za vozača crnog automobila s početnim položajem $x_0 = 200 \text{ m}$, početnom brzinom (koja je

negativna jer se automobil giba nalijevo) $v_0 = -60 \text{ km/h}$ i ubrzanjem $a = 0 \text{ m/s}^2$ vrijedi:

$$x(t) = 200 \text{ m} - 16,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2} \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot t^2.$$

Treba riješiti sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice ($x(t)$ i t) što daje $t = 5,8 \text{ s}$. Uvrštavanjem u jednu od prethodne dvije jednačbe dobije se $x(t) = 103 \text{ m}$. $x(t)$ je točka susreta x_s u odnosu na plavi automobil.

2.4.2. Ubrzanje pri slobodnom padu

Predmet bačen uvis, ispušten iz ruke ili bačen prema dolje u blizini površine Zemlje, ako se zanemari utjecaj zraka, ubrzava se prema dolje sa stalnim iznosom. Taj se iznos naziva ubrzanje ili akceleracija slobodnog pada, obilježava se slovom g i iznosi $9,81 \text{ m/s}^2$. Običaj je položaju predmeta iznad Zemlje dati pozitivan smjer, brzina u smjeru prema gore je pozitivna, a onda je ubrzanje slobodnog pada negativno.

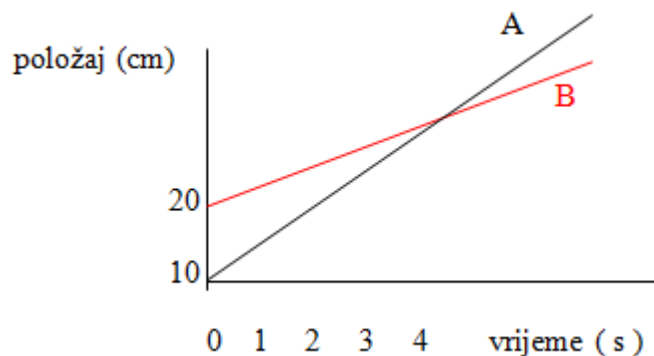
Formula za položaj predmeta u trenutku t koji ima početni položaj (udaljenost od tla) x_0 i početnu brzinu v_0 jest:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

2.4.3. Dodatak

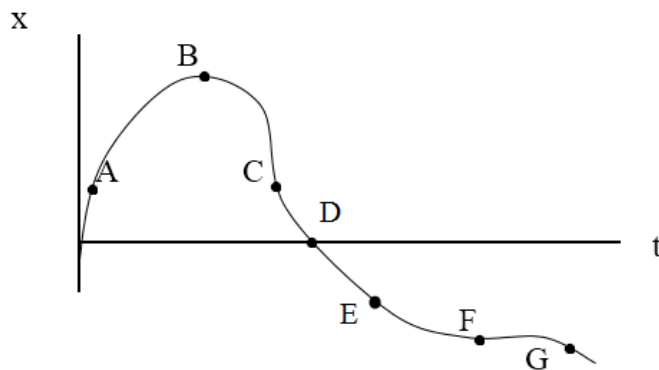
Poteškoće u interpretaciji kinematičkih pojmova

1. Razlikovanje ordinate od nagiba pravca



- Odredite je li u trenutku $t = 2 \text{ s}$ brzina tijela A veća, manja ili jednaka brzini tijela B? Objasnite svoje rasuđivanje.
- Imaju li tijela A i B ikada istu brzinu? Ako imaju, kada?

2. Nejednoliko gibanje s promjenom smjera

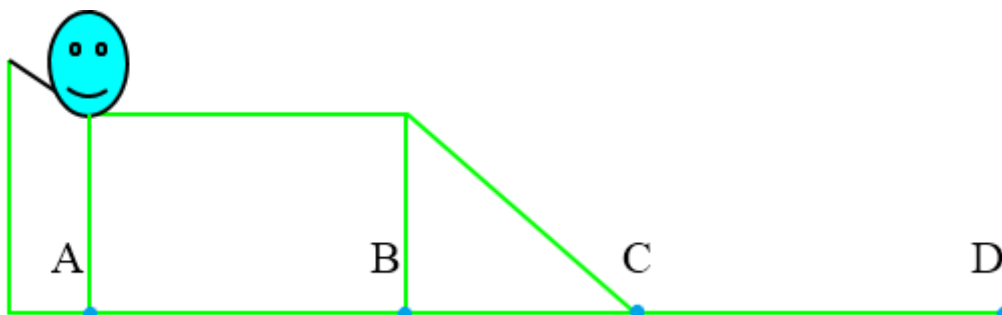


- U kojoj je točki gibanje najsporije?
- U kojoj se točki tijelo ubrzava?
- U kojoj se točki tijelo usporava?
- U kojoj točki tijelo mijenja smjer gibanja?

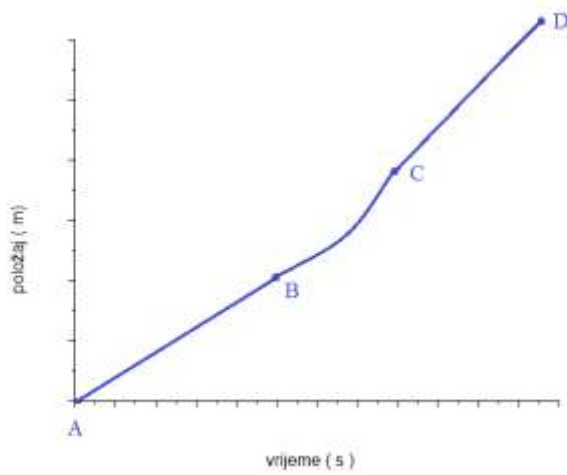
Česta je pogreška da je brzina nula u točki u kojoj je položaj nula. U točki D se tijelo, čije gibanje opisuje graf, nakon približavanja ishodištu (referentnoj točki) počinje od njega udaljavati, pa položaj mijenja predznak, od $+x$ postaje $-x$. Brzina, pak, u okolici te točke ne mijenja svoj iznos (ako smatramo da je u okolici točke D pravocrtno gibanje), ona ima negativan predznak (nagib tangente na krivulju $x(t)$ u točki D veći je od 90° , zatvara tupi kut s pozitivnim smjerom osi x).

3. Pretvaranje stvarnog gibanja u (x, t) -graf, (v, t) -graf i (a, t) -graf

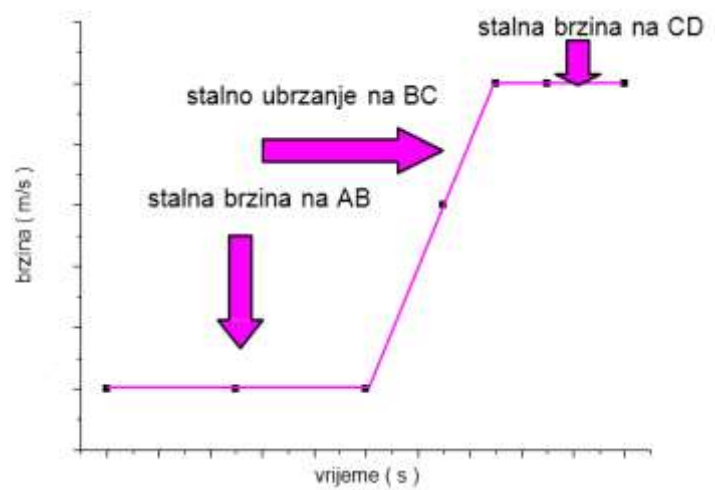
Slika prikazuje glatke tračnice po kojima se giba kugla (dijelovi tračnica AB i CD jednake su duljine). Na dijelu AB kugla se giba jednolikom brzinom, na BC jednoliko ubrzano, a na dijelu CD opet jednolikom brzinom. Prikažite graf položaja, brzine i ubrzanja u ovisnosti o vremenu.



Graf položaj – vrijeme. Nagib na grafu ne prikazuje nagib kosine!



Graf brzina – vrijeme



Graf akceleracija – vrijeme

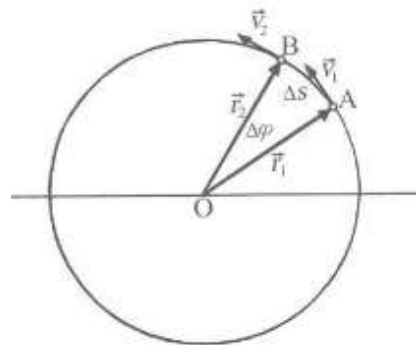


2.5. Rotacija materijalne točke

Najjednostavnije krivocrtno gibanje je jednoliko kruženje. Kod jednolikog kruženja materijalne točke brzina ostaje konstantna po iznosu, ali stalno mijenja smjer što rezultira radijalnom akceleracijom prema središtu kružnice.

Jednoliko kružno gibanje zapravo je ubrzano gibanje, jer se pri njemu stalno mijenja smjer obodne brzine iako njezin iznos ostaje isti.

- linearna (obodna) brzina v
- kutna brzina ω
- radijalna (centripetalna) akceleracija a_r



$$\Delta s = |r| \Delta \varphi$$

$$360^\circ = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi [\text{rad}]$$

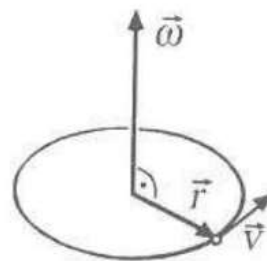
$$x^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot x [\text{rad}]$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} [\text{rad} / \text{s}]$$

$$a_r = v\omega$$

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\frac{v^2}{r} \vec{r}_0 [\text{rad} / \text{s}^2]$$



Slika 16 Vektorski prikaz kinematičkih veličina

Kutna brzina ω je vektor i po definiciji ima smjer po pravcu osi rotacije, a određen je pravilom desne ruke. Radijalna akceleracija ima smjer prema središtu kružnice i zato se zove radijalna ili centripetalna akceleracija. Jednoliko kružno gibanje je kruženje konstantnom kutnom brzinom:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad [\varphi(t=0) = \varphi_0]$$

$$\omega = 2\pi f; \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad v = \frac{2r\pi}{T}$$

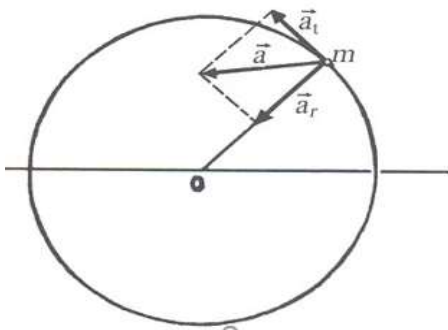
T – period gibanja

2.5.1. Nejednoliko kružno gibanje

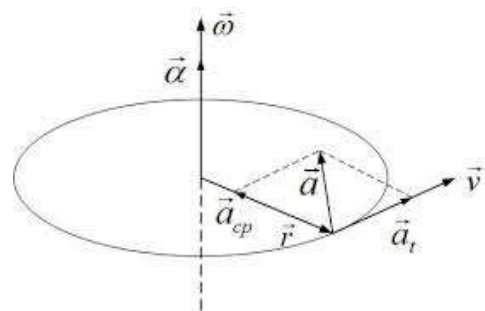
Pri nejednolikom kruženju iznos obodne brzine više nije konstantan, već se mijenja s vremenom. Ukupna akceleracija sastavljena je od radijalne akceleracije i tangencijalne akceleracije. Tangencijalna akceleracija nastaje zbog promjene iznosa obodne brzine:

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$. Ukupna akceleracija jednaka je zbroju tangencijalne i radijalne akceleracije.

Kutno ubrzanje (kutna akceleracija) $\vec{\alpha}$ je fizikalna vektorska veličina koja je jednaka promjeni kutne brzine $\vec{\omega}$ u vremenu.



Slika 17. Vektorski prikaz akceleracije tijekom nejednolikog kružnog gibanja



Slika 18. Prikaz kutne brzine i kutne akceleracije te ukupna akceleracija

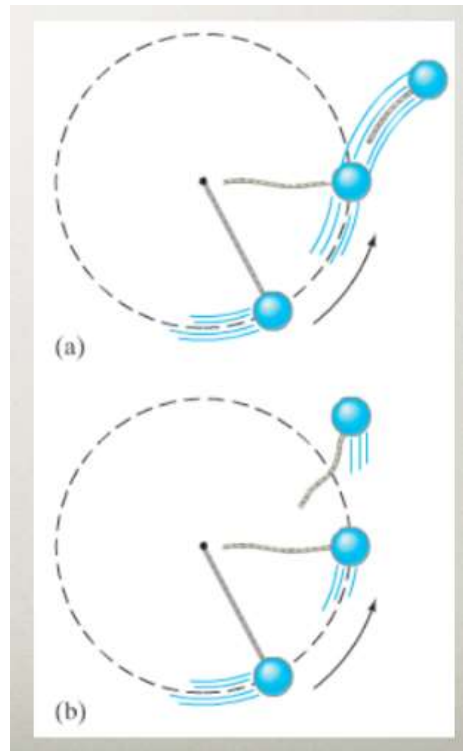
Pravocrtno gibanje	Kružno gibanje
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
$s = vt + s_0$	$\varphi = \omega t + \varphi_0$
$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$	$\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0t + \varphi_0$
$v^2 = 2as + v_0^2$	$\omega^2 = 2\alpha\varphi + \omega_0^2$

Slika 19. Usporedba formula za pravocrtno i kružno gibanje

Zadatak 2.4.

Neka uže kojim je pričvršćena kuglica pukne u trenutku kako je prikazano na slici. Kuglica će se nastaviti gibati kako je prikazano na slici:

- a)
- b).



3. Dinamika

3.1. Što je dinamika?

Dinamika je disciplina koja opisuje *promjenu* nekih veličina tijekom *vremena*. Primjeri su promjena položaja tijela, promjena vrijednosti dionice na burzi, promjena broja riba u bazenu, promjena ritma rada srca.

Dio mehanike koji opisuje promjenu *položaja*, *brzine* i *ubrzanja* tijela kao posljedicu djelovanja sile ili sila na tijelo naziva se dinamika.

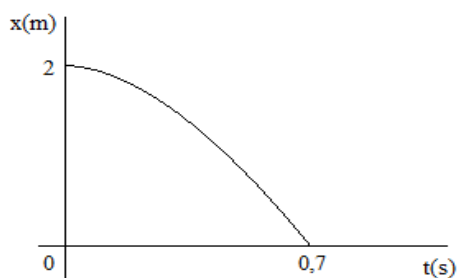
Kažemo da je gibanje determinističko ili predvidljivo ako poznajemo *veličine* u jednom trenutku i ako možemo odrediti te *veličine* kojima opisujemo gibanje tijela u svakom budućem trenutku. Takvi se događaji bitno razlikuju od slučajnih (engl. *random*) ili stohastičkih događaja, npr. bacanja kocke, jer poznavanje ishoda u jednom bacanju ne pomaže predvidjeti ishod u sljedećem bacanju.

Niz stanja koja se mijenjaju tijekom gibanja zraka (npr. pri slobodnom padu tijela bez otpora) prikazujemo različitim vrstama prikaza:

tablicom (numerički)

t	x	v	a
0	2	0	-10
0,1	2	-1	-10
0,2	1,9	-2	-10

grafom (geometrijski)



formulom (algebarski)

$$\bar{x} = \bar{x}_0 - \frac{1}{2} \bar{g} \cdot t^2$$

3.2. Zakoni mehanike

Događaj kao guranje ili potezanje koji izaziva ubrzanje tijela jest sila. Proučavanje odnosa sile i ubrzanja tema je Newtonove mehanike (prema Isaacu Newtonu, 1642. – 1727.), a opisujemo ih s pomoću triju Newtonovih zakona, tj. triju zakona mehanike:

1. *Newtonov zakon*: Ako na tijelo ne djeluje sila niti rezultanta sila različita od nule, onda se brzina tijela ne mijenja.
2. *Newtonov zakon*: Ako djeluje resultantna sila različita od nule, tijelu se mijenja brzina. Pokušaj pokazuje da se brzina mijenja brže što je sila veća, a sporije što je veća masa tijela. Pritom se brzina mijenja u smjeru djelovanja resultantne sile:

$$\vec{a} = \frac{\sum \pm \vec{F}}{m}$$

Σ je oznaka za zbrajanje, ovdje za zbrajanje sila koje su vektori, pa treba voditi računa o smjeru sila. Pri rješavanju zadataka s drugim Newtonovim zakonom koristi se dijagram sila u kojem je prikazano samo ono tijelo za koje želimo znati koji zbroj sila na njega djeluje. Na dijagramu je svaka sila prikazana strelicom s početkom u točki koja prikazuje tijelo. Svojstvo tijela da se opire promjeni naziva se *tromost* ili *inercija*. Mjera tromosti je masa. Jedinica za tu fizikalnu veličinu je kg.

Primjer 3.1. U slučaju padanja tijela koje miruje u početku, u blizini površine Zemlje uz zanemariv otpor zraka na tijelo, djeluje samo gravitacijska sila prema dolje $\vec{G} = -m\vec{g}$, pa vodimo računa samo o promjeni brzine u smjeru prema dolje.



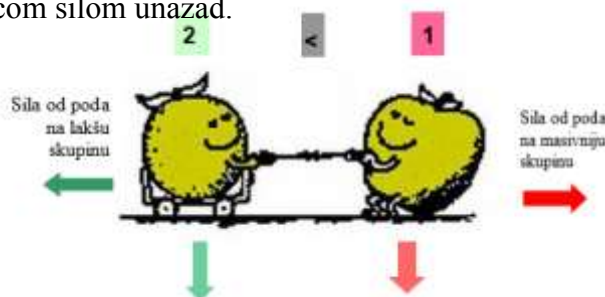
$$\vec{F} = \vec{G} = -m\vec{g}$$

$$\vec{a}_x = \frac{\sum \vec{F}_x}{m} = \frac{-m\vec{g}}{m} = -\vec{g}$$

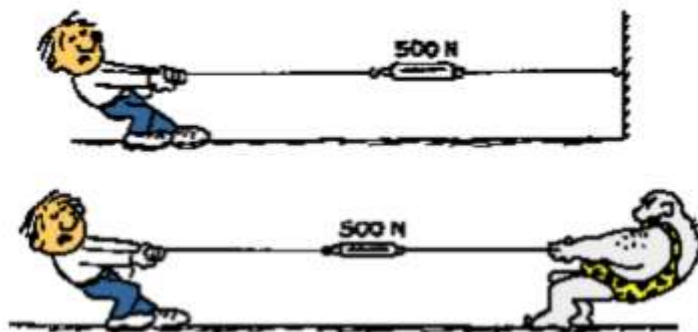
Drugi zakon mehanike opisuje utjecaj okoline na tijelo čije gibanje proučavamo.

3. *Newtonov zakon.* Radi potpunosti opisa pojma sile treba dodati sljedeće: kad god primijetimo utjecaj okoline na neko tijelo, moramo primijetiti da tijelo djeluje jednako na okolinu – istom silom, ali suprotnog smjera.

Primjer 3.2. U igri potezanja konopa pobjeđuje skupina koja povuče protivnike za npr. pola metra, iako je sila kojom pobjednička skupina vuče konop jednaka po iznosu sili kojom poražena skupina vuče konop. Je li u toj tvrdnji išta sporno? Skupina se pomiče (mijenja brzinu) kad na nju djeluje ukupna sila različita od nule i to u smjeru sile. Na svaku skupinu, osim sile od konopa F_{konopa} djeluje i sila od poda (pasivna sila jednaka po iznosu, ali suprotna po smjeru sili kojom ta skupina gura pod, a jednaka je sili trenja, k je koeficijent trenja, m je masa članova skupine). Skupina čiji članovi imaju veću masu pobjeđuje jer njezini članovi većom silom pritišću pod pa njih (zajedno s drugom skupinom) pod gura većom silom unazad.



Primjer 3.3. Sila kojom čovjek poteže konop učvršćen za zid jednaka je sili kojom zid djeluje na konop u suprotnom smjeru. Ako ulogu zida preuzme atlet, da bi konop mirovao, on mora djelovati istom silom kao prije zid, a ta je 500 N.

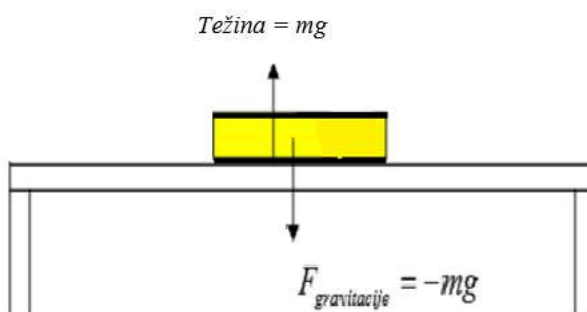


3.2.1. Zakon sile

Da bi se primijenio drugi Newtonov zakon ili temeljni zakon gibanja, treba znati formulu za silu, koja se naziva zakonom sile. Sile dijelimo na fundamentalne poput gravitacijske ili električne i empirijske poput sile trenja klizanja i sile otpora pri gibanju tijela u fluidu (tekućini i plinu).

Primjer 3.4. Kako izgleda formula za silu otpora pri gibanju tijela u fluidu? Pri malim brzinama sila otpora to je veća što je brzina veća, $F_{\text{otpora}} = -k v$, a u smjeru je suprotnom od brzine. Konstanta k se određuje u pokusu, empirijski pri većim brzinama tijela. Sila raste brže nego što raste brzina, iznos sile otpora je $F_{\text{otpora}} = -B v^2$, B je konstanta koja ovisi o gustoći fluida i obliku tijela, pa se dobije zakon sile otpora $F_{\text{zraka}} \approx -\frac{1}{2} \rho A v^2$, gdje je ρ gustoća fluida, a A površina tijela.

Težina tijela po iznosu je jednaka ukupnoj sili koja treba djelovati na tijelo da ga spriječi slobodno padati. Težina knjige koja miruje na stolu jest sila prema gore i po iznosu je jednaka iznosu gravitacijske sile na knjigu $G = mg$. Težinu tijela treba mjeriti onda kada tijelo nema ubrzanje u vertikalnom smjeru s obzirom na tlo.



Slika 20. Prikaz sile na tijelo na podlozi

3.2.2. Ubrzani sustavi

Ako mjerite svoju težinu vagom na oprugu u dizalu tijekom ubrzanja prema gore, broj koji pokazuje iznos težine bit će veći. Izmjerali ste prividnu težinu. Dizalo nije inercijalni, nego je ubrzani sustav. U sustavima koji se gibaju s ubrzanjem a javljaju se inercijalne sile:

$$F_{\text{inerc}} = ma.$$

Primjer 3.5. U dizalu stojimo na vagi koja pokazuje masu od 70 kg. Dizalo kreće prema gore s ubrzanjem od 2 m/s^2 , nakon što prođe prvi kat ima stalnu brzinu sve do osmog kata, a onda mu se brzina smanjuje sa stalnim usporenjem od -2 m/s^2 , dok se ne zaustavi na desetom katu. Koju vrijednost pokazuje vaga pri početnom ubrzanju, koju tijekom vožnje od prvog do osmog kata, a koju pri usporenju?

Pri ubrzanju a mi smo u ravnoteži u dizalu (prema unutrašnjosti dizala mirujemo) što znači da je zbroj sila na naše tijelo jednak nuli: $-mg - ma + G_{\text{prividna}} = 0$.

Ako je težina u mirnom dizalu G , vrijedi donji izraz, a onda bi vaga pokazala $m = 84 \text{ kg}$.

$$G_{\text{prividna}} = G\left(1 + \frac{a}{g}\right) \approx 700\text{N}\left(1 + \frac{2}{10}\right) \approx 840\text{N}.$$

Napomena: masa se ne mijenja. Vaga zapravo mjeri silu (težinu), pa promijenjeni iznos sile koja je potrebna da spriječi tijelo iste mase da ne pada slobodno, vaga prikazuje kao promijenjenu masu. U ubrzanom sustavu dizala, osim gravitacijske sile, djeluje i inercijalna sila $-ma$ u istom smjeru te pod silom G_{prividna} prema gore. Dok se dizalo giba stalnom brzinom, vaga pokazuje $m = 70 \text{ kg}$, a pri usporenju vaga pokazuje $m = 56 \text{ kg}$.

$$G_{\text{prividna}} = G\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 560\text{N}$$

3.3. Rješavanje jednadžbe gibanja

U drugom poglavlju napisali smo izraz za gibanje po pravcu sa stalnim ubrzanjem. Slobodni pad uvrstili smo u skupinu takvih gibanja, gdje se stalno ubrzanje obilježava s g i na srednjim geografskim širinama iznosi oko $9,81 \text{ m/s}^2$.

3.3.1. Diferencijalne jednadžbe

Kada na tijelo ne djeluje stalna sila, već se ukupna sila tijekom vremena i na različitim mjestima mijenja, postupak predviđanja promjena veličina kojima opisujemo gibanje počinje od drugoga Newtonova zakona i uvrštavanja sila koje djeluju na tijelo u jednadžbu

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

vodeći računa o smjeru djelovanja sila. Standardna tehnika je primjena pojma derivacije i rješavanja diferencijalnih jednadžba primjenjujući pravila integralnog računa.

Problem padanja tijela bez otpora zraka već smo riješili korištenjem kinematičke formule (koristimo se iznosima pripadnih veličina): $v = -v_0 - gt$ i $x = x_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Riješimo isti problem koristeći se tehnikom koju je izmislio Newton.

$$a = \frac{\sum F}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-mg}{m} = -g \text{ diferencijalna jednačnja}$$

Riješiti navedenu jednačnju znači odrediti funkciju $v(t)$ koja ima svojstvo da se mijenja sa stalnim iznosom. Takvo svojstvo ima linearna funkcija, grafički prikazana pravcem. Tehnički gledano, gornja se jednačnja rješava primjenom integralnog računa:

$$\frac{dv}{dt} = -g \rightarrow dv = -g \cdot dt \rightarrow \int dv = -g \int dt$$

$v(t) = v_0 - gt$, a uz početnu brzinu $v_0 = 0 \text{ m/s}$ dobivamo $v(t) = -gt$.

Položaj se odredi ako se u gornjoj jednačnji brzina zamijeni s izrazom:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -gt \rightarrow dx = -gt \cdot dt \rightarrow \int dx = -g \int t dt \rightarrow x(t) = x_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Naravno da smo rješenje već znali, ali upravo nam je to potvrda da tehnika integralnog računa daje dobar rezultat. Kako riješiti padanje tijela uz otpor zraka za male brzine?

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sum F}{m} = \frac{-mg - kv}{m} = -g - \frac{kv}{m} \text{ diferencijalna jednačnja}$$

Tu jednačnju teže je riješiti. Često se pojave sile kompliciranog oblika zakona sila (formule), tako da je diferencijalnu jednačnju nemoguće riješiti.

3.3.2. Diferencijalne jednačnje

Ova se metoda rješavanja još naziva rješavanje korak po korak. Pokažimo je na primjeru vertikalnog hica (otpor zraka u tom slučaju ne zanemarujemo).

$$a = \frac{\sum F}{m} \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sum F}{m} = \frac{-mg - kv}{m} = -g - \frac{kv}{m} \text{ diferencijalna jednačnja}$$

1. Položaj se mijenja jer tijelo ima brzinu: $\Delta x = v\Delta t$.
2. Novi položaj izračuna se polazeći od položaja u početku: $x_{novi} = x_{stari} + v\Delta t$.
3. Diferencijalna jednačnja omogućuje izračunati promjenu brzine za vrijeme Δt :

$$\Delta v = \left(-g - \frac{kv}{m}\right) \cdot \Delta t.$$

4. Ako poznajete brzinu tijela u početnom trenutku t_0 , novu brzinu možete izračunati s pomoću izraza: $v_{novi} = v_{stari} + \Delta v$.
5. Ubrzanje se računa iz omjera: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Primjer 3.6. Zračni balon se diže vertikalno uvis stalnom brzinom od 10 m/s. Privezan užetom za balon visi predmet mase $m = 50$ kg. Na visini 50 m iznad tla uže pukne. Izračunajte postupkom korak po korak položaj predmeta 0,3 s nakon pucanja užeta ako je $k = 0,5$ kg/s. Položaje računajte svaku 0,1 s. Otpor zraka računajte prema $F_{otpora} = -kv$. Podatke prikažite u tablici donjeg formata.

Rješenje:

U zadatku su sva rješenja za položaj x u mjernoj jedinici metar, rješenja za brzinu v u metrima po sekundi, a za akceleraciju a u metrima po sekundi na kvadrat.

1.korak :		
$\Delta \cdot x = 10 \cdot 0.1 = 1$	$\Delta v = (-9.81 - \frac{0.5 \cdot 10}{50}) \cdot 0.1 = -0.991$	
$x_{novi} = 50 + 1 = 51$	$v_{novi} = 10 + (-0.991) \approx 9$	$a = -0.991 / 0.1 = -9.91$
<hr/>		
2.korak :		
$\Delta \cdot x = 9 \cdot 0.1 = 0.9$	$\Delta v = (-9.81 - \frac{0.5 \cdot 9}{50}) \cdot 0.1 = -0.99$	
$x_{novi} = 51 + 0.9 = 51.9$	$v_{novi} = 9 + (-0.99) \approx 8$	$a = -0.99 / 0.1 = -9.90$
<hr/>		
3.korak		
$\Delta \cdot x = 8 \cdot 0.1 = 0.8$	$\Delta v = (-9.81 - \frac{0.5 \cdot 8}{50}) \cdot 0.1 = -0.989$	
$x_{novi} = 51.9 + 0.8 = 52.7$	$v_{novi} = 8 + (-0.989) \approx 7$	$a = -0.989 / 0.1 = -9.89$

korak	trenutak	položaj	brzina	ubrzanje
0	0	50	10	-9.91
1	0.1	51	9	-9.90
2	0.2	51.9	8	-9.89
3	0.3	52.7	7	-9.88

4. Količina gibanja i energija

Poznavanje dinamičkih zakona omogućuje predvidjeti položaj, brzinu i akceleraciju ako su poznate sile koje djeluju na materijalnu česticu. Često su te sile komplicirane i primjena tehnike numeričkog računanja koju smo prikazali u prethodnom poglavlju ne bi se pokazala prikladnom.

Primjer 4.1. Loptica se giba po zakrivljenoj podlozi bez trenja s početne visine od 1 metar početnom brzinom od 5 m/s. Izračunajte brzinu koju ima loptica na kraju gibanja, kad je na visini 0 m?



Sila se mijenja tijekom putanje loptice na kompliciran način, a treba poznavati sile u svakom trenutku. Na sreću, postoji druga tehnika za opis gibanja koja se temelji na poznavanju pojmova količine gibanja i energije i zakona očuvanja tih fizikalnih veličina u zatvorenom sustavu, tj. sustavu u kojem ne djeluju vanjske sile.

4.1. Količina gibanja i impuls sile

Ako u drugi Newtonov zakon $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ uvrstimo izraz za akceleraciju $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, dobije se:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}}{m} \cdot \Delta t \cdot m$$

$$m \cdot \Delta\vec{v} = \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

m – masa tijela na koje djeluje sila \vec{F}

\vec{v}_2 – brzina prije djelovanja sile

\vec{v}_1 – brzina nakon djelovanja sile

Δt – vrijeme za koje je djelovala sila.

Iz gore napisane formule definiraju se nove veličine:

$m \cdot \vec{v}$ – količina gibanja tijela mase m i brzine \vec{v}

$\vec{F} \cdot \Delta t$ – impuls sile \vec{F} koja djeluje tijekom intervala Δt .

Impuls sile jednak je razlici količina gibanja prije djelovanja sile i poslije njezina djelovanja. Impuls sile je vektorska veličina koja je po iznosu jednaka umnošku sile i vremenskog intervala u kojem je djelovala ta sila. Smjer impulsa sile jednak je smjeru sile.

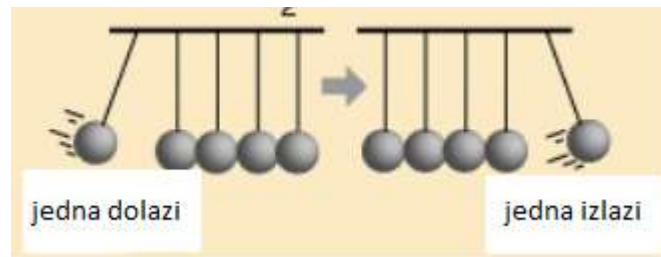
Količina gibanja je vektorska veličina po iznosu jednaka umnošku mase i brzine tijela. Smjer količine gibanja jednak je smjeru brzine tijela.

Primjer 4.2. Usporedite sudar automobila sa stablom i sa stogom sijena. Pri sudaru sa stablom promjena količine gibanja od neke prije sudara na nulu zbiva se u kratkom vremenskom intervalu, ali tijekom kojeg djeluje velika sila koja može znatno deformirati auto. Pri sudaru sa sijenom djeluje mala sila tijekom dugog vremena, pa auto prođe gotovo neoštećen.

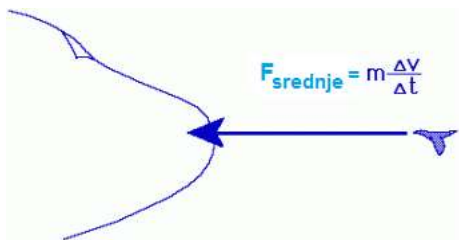


Primjer 4.3. Karatist zamahne rukom vrlo brzo i postiže veliku količinu gibanja. Tu količinu gibanja treba prilikom sudara ruke s opekom smanjiti na nulu i postići gibanje ruke u suprotnom smjeru (sudar je elastičan) u što kraćem vremenu, pa je zato sila sudara goleva, opeka se savije i pukne.

Sudari mogu biti elastični, kada je kinetička energija očuvana, ili neelastični, kada se pri sudaru dio kinetičke energije pretvara u toplinsku energiju. Slika prikazuje primjer elastičnog sudara.



Primjer 4.4. Procijenite prosječnu silu sudara između zrakoplova koji leti brzinom od 600 km/h i patke mase 2 kg, duge 40 cm. Pretpostavite neelastični sudar. Sila sudara mogla bi se smanjiti, ali i povećati u slučaju elastičnog sudara.

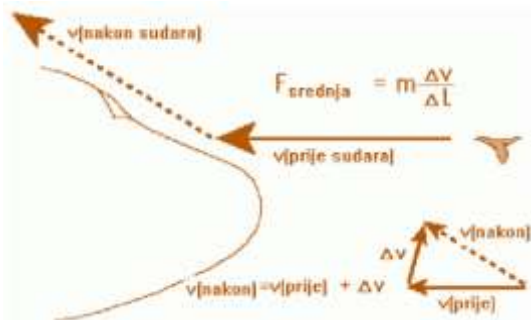


Pretpostavimo neelastični sudar u kojem se ptica nakon sudara nastavi gibati sa zrakoplovom. Njezinu količinu gibanja prije sudara smatramo zanemarivo malom. Vrijeme sudara izračuna se iz pomaka zrakoplova od 40 cm:

$$\Delta t = \frac{x}{v} = \frac{0,4m}{166 \frac{m}{s}} \approx 0,002s .$$

Promjenu brzine patke izračunamo pretpostavljajući da joj se brzina promijenila od nule na brzinu zrakoplova $\Delta v = 166 \text{ m/s}$.

Srednja sila je:



$$F = m \cdot (\Delta v / \Delta t) = 2 \cdot (166 / 0,002) \text{ N}$$

Sila iznosi 166 000 N, što odgovara težini tijela mase 16,6 tona!

Pretpostavimo da je sudar elastičan i da ptica promijeni smjer brzine. Primjenjujući pravilo zbrajanja vektora vidi se da je za mali kut otklona promjena brzine mala.

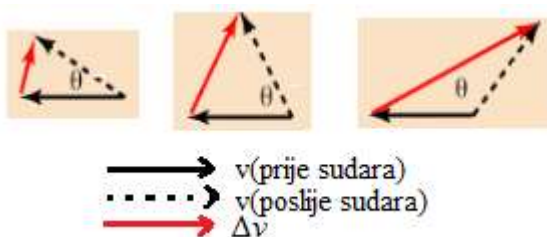
Ta se promjena može izračunati primjenjujući kosinusovo pravilo:

$$\Delta v^2 = v_p^2 + v_k^2 - 2 \cdot v_p \cdot v_k \cdot \cos \vartheta$$

$$F_{sr} = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$$

(v_p – iznos brzine prije sudara, v_k – iznos brzine poslije sudara).

Kada su v_p i v_k istog iznosa, tada vrijedi $\Delta v = 2v \sin(\frac{\vartheta}{2})$.



Za kut od 60° vektor po iznosu Δv jednak je brzini v . Za kut otklona veći od 60° sila sudara veća je nego u slučaju frontalnog neelastičnog sudara. Za slučaj $\theta = 30^\circ$ dobije se da je srednja sila sudara zrakoplova i patke:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{2 \cdot v \cdot \sin(\vartheta/2)}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 166 \cdot \sin(30^\circ/2)}{0,002} \text{ N} \approx 86000 \text{ N} .$$

U slučaju elastičnog sudara s otklonom patke od 30° srednja sila iznosi 86 000 N, što približno odgovara težini tijela mase 8,6 tona.

4.2. Energija i zakon o očuvanju energije

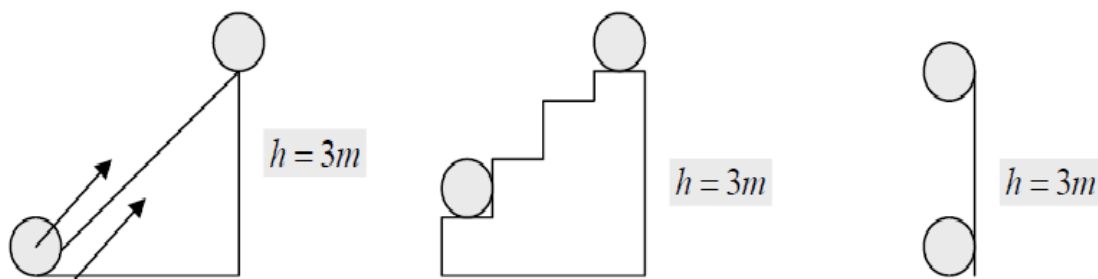
Pojam energije temeljni je pojam za sve prirodne znanosti. Dok je materiju moguće predstaviti kao nešto što zauzima prostor i masu, energija je apstraktan pojam koji opisuje svojstvo materije da, unatoč promjenama kojima je materija podvrgnuta, nešto (a to nešto nazivamo energija) u tim promjenama ostaje nepromijenjeno, samo što mijenja oblike.

Mehanička energija

Energija se javlja u obliku mehaničke energije kao kinetička energija tijela mase m i brzine v izražena formulom $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, kao gravitacijska potencijalna energija tijela mase m na visini h iznad referentne razine kojoj pridjeljujemo visinu $h = 0$ m, izražena formulom

$E_p = mgh$, ili kao elastična potencijalna energija opruge rastegnute za pomak, koja elastičnom silom $F = -k\Delta x$ vraća tijelo mase m , a izražena je formulom $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$.

Primjer 4.5. Kolika je promjena gravitacijske potencijalne energije pri pomicanju kugle $m = 1 \text{ kg}$ po podlozi bez trenja na istu visinu h u tri slučaja kao na donjoj slici?



Kako pri pomicanju kugle po horizontalnoj podlozi ne treba djelovati silom jer zanemarujemo trenje, povećanje potencijalne gravitacijske energije isto je u sva tri slučaja i iznosi $E_p = mgh = 1 \cdot 9,81 \cdot 3 \text{ J} = 24,43 \text{ J}$.

Ako potencijalna energija koju poveća automobil pri usponu ovisi samo o razlici početne visine i vrha uspona, zašto cesta ne ide ravno uzbrdo, nego se postupno uspinje vijugajući prema vrhu?

4.2.1. Rad

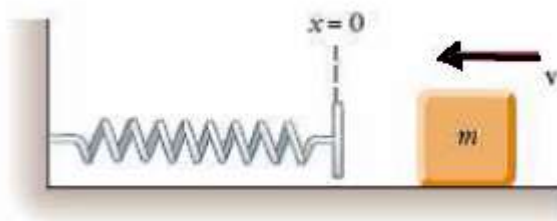
Kinetičku energiju tijela moguće je povećati ili smanjiti djelovanjem sile na to tijelo. Izmjena kinetičke energije preko vanjske sile s nekim tijelom naziva se rad. Ako rad obavlja stalna sila, a pri tome se njezina orijentacija stalno podudara s pravcem pomaka tijela, možemo pokazati da za rad vrijedi formula:

$$W = F \cdot \Delta x \text{ (jedinica za rad je džul, znak J).}$$

Rad je pozitivan ako se na tijelo prenosi energija. Ako tijelo predaje energiju, rad je negativan.

Rad i kinetička energija povezani su izrazom: $W = E_2 - E_1$, gdje je E_1 energija prije interakcije, a E_2 energija poslije interakcije.

Primjer 4.6. Slika prikazuje tijelo mase 1 kg koje brzinom od $0,5 \text{ m/s}$ nalijeće na oprugu konstante opruge $k = 100 \text{ N/m}$. Koliki je pomak opruge u trenutku kad je brzina tijela nula? Tijelo se giba po podlozi bez trenja.



Rad koji izvrši opruga na tijelo pri sudaru jest:

$$W_{opruga} = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2.$$

Primjenom izraza koji povezuje rad i kinetičku energiju dobije se:

$$W = (E_k)_{kraj} - (E_k)_{pocetak}.$$

Na kraju pomicanja opruge (sabijanja) kinetička energija je nula pa se dobije izraz za pomak:

$$\Delta x = v \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,5 \frac{m}{s} \sqrt{\frac{1N}{100 \frac{N}{m}}} = 0,05m = 5cm.$$

Primjer 4.7. Kojom srednjom silom stijena teška 10 N udari o pod ako je puštena iz mirovanja s visine od $h = 10$ m?

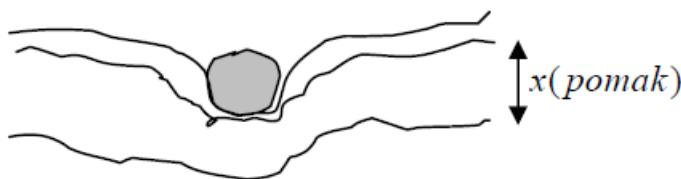
To se pitanje ne može brojčano riješiti ako se ne odrede još neke veličine. Koje?

Na visini od 10 m stijena ima gravitacijsku potencijalnu energiju koja se padanjem pretvara u kinetičku energiju. Neposredno prije udara sva je energija stijene u obliku kinetičke energije i onda počne djelovanje sile od poda na stijenu. Izvršeni rad može se izračunati ako je poznat pomak na kojem se stijena zaustavljala:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$F_{srednja} \cdot x = \Delta(E_k)$$

$$F_{srednja} \cdot x = \frac{1}{2}mv^2$$



ili ako znamo vremenski interval koliko je zaustavljanje trajalo:

$$F_{srednja} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v.$$

Snaga P je veličina kojom se izražava brzina vršenja prijenosa energije te je jednaka

$P = \frac{W}{t}$. Jedinica za snagu je vat (W). U SI sustavu tolerira se upotreba stare jedinice za

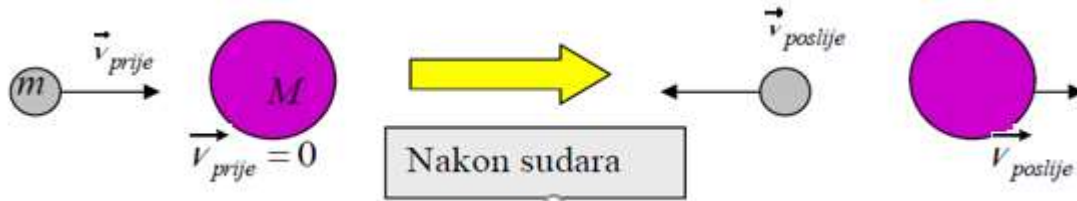
snagu, konjske snage (1 KS = 740 W).

4.3. Zakon o očuvanju količine gibanja

Prilikom izmjene sile (interakcije) između dvaju ili više tijela koja čine zatvoreni sustav (nema vanjske sile) ukupna količina gibanja se ne mijenja. Taj zakon vrijedi bez obzira na to jesu li izmijenjene sile disipativne (trenje) kao u neelastičnom sudaru ili su konzervativne (gravitacijska sila ili elastična sila opruge).

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = const.$$

Primjer 4.8. Razmotrimo elastični sudar male kuglice koja se giba brzinom v s masivnom kuglom koja miruje na glatkom stolu.



Primijenimo zakon očuvanja količine gibanja: $m\vec{v}_{prije} = M\vec{V}_{poslije} - m\vec{v}_{poslije}$.

Primijenimo zakon očuvanja energije: $m\vec{v}_{prije}^2 = M\vec{V}_{poslije}^2 - m\vec{v}_{poslije}^2$.

Rješavajući sustav jednačja, dobije se:

$$\vec{v}_{poslije} = \vec{v}_{prije} \frac{M - m}{M + m}$$

$$\vec{V}_{poslije} = \vec{v}_{prije} \frac{2m}{M + m}$$

Za slučaj $M = 20m$ mala se kugla odbije unatrag brzinom $-0,9$ početne brzine male kugle, a velika kugla nakon sudara giba se brzinom $0,1$ početne brzine male kugle.

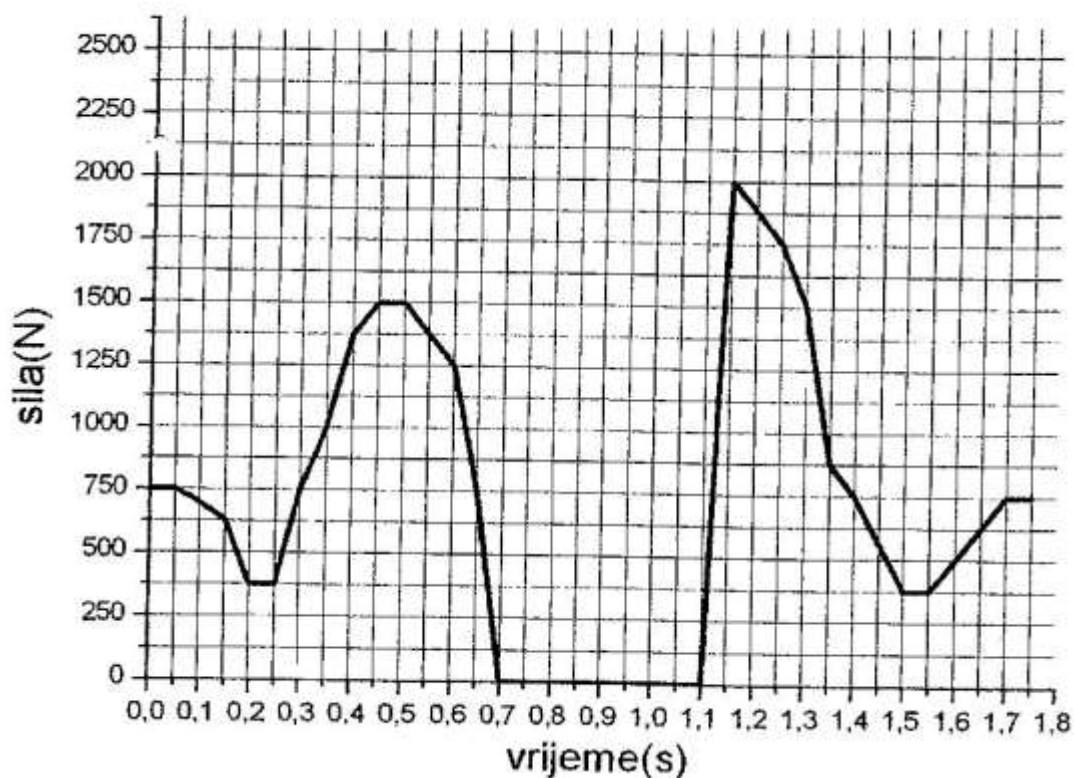
Primjer 4.9.



Slika prikazuje skakača koji se nalazi na vagi. Skakač skoči s mjesta uvis, a vaga pokazuje kako se mijenja sila kojom skakač djeluje na vagu tijekom skoka. Kakvom silom skakač djeluje na vagu? (F, t) -graf prikazuje ovisnost sile kojom skakač djeluje na vagu tijekom nekog vremenskog intervala za vrijeme odskoka i doskoka. U $t = 0$ s vaga pokazuje težinu skakača koji miruje na vagi.

Odredite:

- impuls sile koja ubrzava skakača za vrijeme odskoka od $0,3$ s do $0,65$ s
- brzinu skakača u trenutku odskoka
- iz grafa odredite vrijeme skoka, pa koristeći se formulom $v = v_0 - g \cdot t$ za vertikalni hitac bez otpora zraka, izračunajte početnu brzinu i usporedite koliko se posto razlikuju brzine koje ste izračunali pod b) i c).



Rješenje:

Impuls sile po iznosu odgovara površini ispod *sila – vrijeme* dijagrama.

Iznos površine jednog kvadratića odgovara impulsu sile.

Od 0,3 pa do 0,65 sekunde impuls sile ubrzava skakača vertikalno prema gore. Težina kojom skakač djeluje na vagu može se odrediti u trenutku $t = 0$ s i vidimo da je iznos 750 N. Iz težine skakača $G = m \cdot g$ možemo izračunati masu skakača.

$$m_{\text{skakaca}} = \frac{750 \text{ N}}{9,81 \text{ ms}^{-2}} = 76,45 \text{ kg}$$

$$m_{\text{skakaca}} = 76,45 \text{ kg}$$

Iznos impulsa sile za jedan kvadratić:

$$F \cdot \Delta t = \frac{250 \text{ N}}{2} \cdot \frac{0,1 \text{ s}}{2} = 125 \cdot 0,05 \text{ Ns} = 6,25 \text{ Ns} .$$

a) Impuls sile koja ubrzava skakača iznosi:

$$0,3 \text{ s} - 0,35 \text{ s} \quad 2/2 = 1 \text{ kvadratić}$$

$$0,35 \text{ s} - 0,4 \text{ s} \quad 3/2 = 1,5 \text{ kvadratić}$$

$$0,4 \text{ s} - 0,45 \text{ s} \quad 5 + 0,5 = 5,5 \text{ kvadratića}$$

$$0,45 \text{ s} - 0,5 \text{ s} \quad 6 \text{ kvadratića}$$

$$0,5 \text{ s} - 0,55 \text{ s} \quad 5 + 0,5 = 5,5 \text{ kvadratića}$$

$$0,55 \text{ s} - 0,6 \text{ s} \quad 4,5 \text{ kvadratića}$$

$$0,6 \text{ s} - 0,65 \text{ s} \quad 3/2 = 1,5 \text{ kvadratića}.$$

Ukupno je 25,5 kvadratića pa slijedi da je impul sile jednak:

$$F \cdot \Delta t = 25,5 \cdot 6,25 \text{ Ns} = 159,375 \text{ Ns}$$

b)

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

$$v = \frac{F \cdot t}{m} = \frac{159,375 \text{ Ns}}{76,25 \text{ kg}} = 2,09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Vrijeme odskoka i doskoka trajalo je $(1,1 \text{ s} - 0,7 \text{ s}) = 0,4 \text{ s}$, a vrijeme uspinjanja skakača trajalo je $0,2 \text{ s}$.

$v = v_0 - gt$ U gornjoj točki $v = 0 \text{ m/s}$ pa je $v_0 = g \cdot t$.

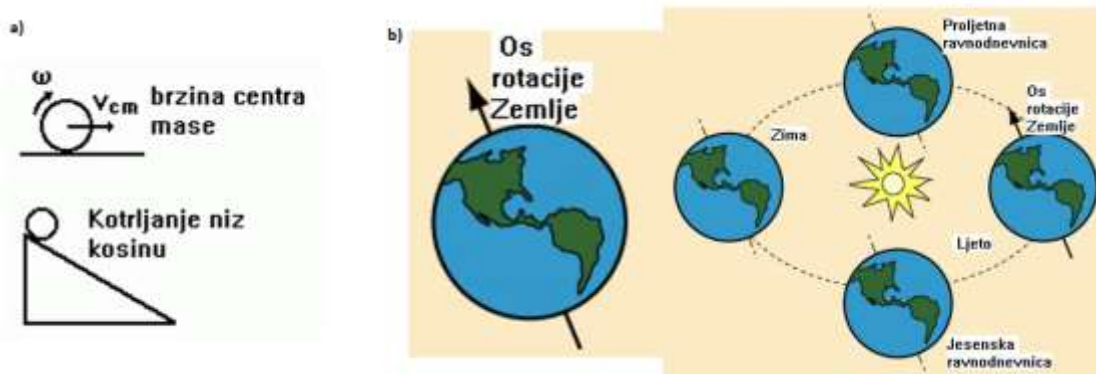
$$v_0 = 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,2 \text{ s} = 1,962 \text{ m/s}$$

Ne uzimajući u obzir otpor zraka koji se javlja na skakača i uspoređujući brzine dobivene pod b) i c), dobivamo:

$$\frac{v}{v^*} = \frac{2,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,962 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,0295. \text{ Pogreška u određivanju brzine je } 2,95 \%$$

5. Rotacija krutog tijela

Ovdje proučavamo rotaciju krutog tijela oko čvrste osi. Kruto tijelo zadržava stalni oblik i rotira tako da razmak između svih njegovih dijelova ostaje nepromijenjen.

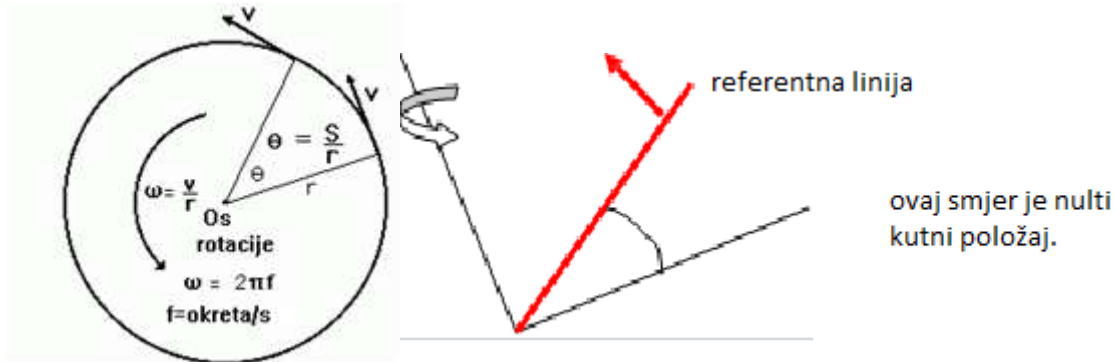


Slika 21. a) Princip gibanja bicikla – translacijsko + rotacijsko gibanje, b) rotacija Zemlje

Gibanje bicikla kombinacija je rotacije kotača (kotrljanje) oko središta kotača i linearnog pomicanja centra mase bicikla (rotacijsko + translacijsko gibanje) (slika 21.a).

5.1. Kutne veličine

Analogno položaju kod translacijskog gibanja, uvodimo pojam *kutnog položaja* neke izabrane crte (referentna crta koja je okomita na os rotacije i vezana je za tijelo koje rotira) kao kut te crte u odnosu na fiksni smjer koji se uzima kao nulti kutni položaj.



Slika 22. Određivanje kuta

Iz geometrije je poznata veza kuta ϑ , duljina luka s i radijusa kruga r :

$$\vartheta = \frac{s}{r} \quad (\text{kut je izražen u radijanima}).$$

Kad referentna crta napravi dva puna okreta, kut nije jednak nuli, već iznosi 4π . Kutni pomak $\Delta\vartheta$ nastaje kad referentna crta iz položaja ϑ_1 dođe u kutni položaj ϑ_2 . Slijedi $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Za isti iznos pomaknu se sve točke krutog tijela. Po definiciji je kutni pomak pozitivan ako je u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu.

Iznos *kutne brzine* ω je omjer kutnog pomaka i vremenskog razmaka Δt :

$$\omega = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}.$$

Jedinica je radijan u sekundi (rad/s) ili okreta u sekundi (okr/s).

Iznos *kutnog ubrzanja* α je veličina koja mjeri promjenu kutne brzine u vremenu:

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Kutna brzina i kutno ubrzanje su vektorske veličine kojima je smjer okomit na ravninu putanje, tj. leži na pravcu koji je os vrtnje tijela.

Gibanje s konstantnom kutnom akceleracijom prema analogiji s linearnim gibanjem opisuje se izrazom:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Primjer 5.1. Vrtuljak smanjuje kutnu brzinu od 4,4 rad/s na 3 rad/s tijekom sljedećih 10 okreta. Kolika je konstantna kutna akceleracija tijekom tog gibanja? Osnovna je zamisao da se mogu primijeniti izrazi za gibanje s konstantnim ubrzanjem. Neka u trenutku $t_0 = 0$ s vrtuljak ima brzinu $\omega_0 = 4,4$ rad/s. Kutni pomak tijekom kojeg se vrtuljak usporava jednak je

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 10 \text{ okreta.}$$

Vrijeme tijekom kojeg se vrtuljak usporava jednako je $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$,

pa se njegovim uvrštavanjem u formulu $\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

dobije $\vartheta - \vartheta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2$.

Ako riješimo taj izraz za kutno ubrzanje i uvrstimo poznate veličine, dobije se iznos kutnog ubrzanja:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\vartheta} = \frac{(3\text{rad/s})^2 - (4.4\text{rad/s})^2}{2 \cdot 62.85\text{rad}} = -0.0824\text{rad/s}^2.$$

5.1.1. Veze linearnih i kutnih veličina

Polazeći od geometrijske povezanosti kuta, radijusa i luka kružnice dane izrazom $s = \vartheta r$ koja povezuje linearnu i kutnu veličinu, dijeljenjem s vremenom dobije se:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} r, \text{ pa vrijedi } v = \omega \cdot r.$$

Taj izraz nam govori da točke udaljenije od osi rotacije imaju veću linearnu brzinu. Slično se dobije veza linearnog (tangencijalne komponente) i kutnog ubrzanja $\vec{a}_{\text{tan}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$.

Radijalna komponenta linearnog ubrzanja, koja mijenja smjer linearne brzine \mathbf{v} , jest:

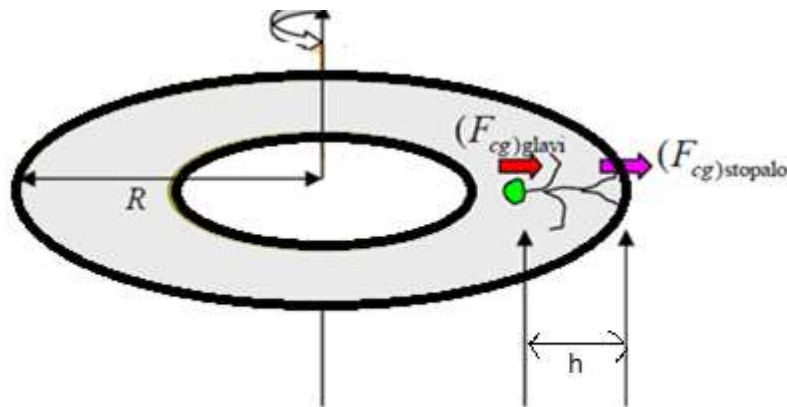
$$\vec{a}_{\text{rad}} = -\frac{v^2}{r} \vec{r}_0 = -\omega^2 r \cdot \vec{r}_0.$$

5.1.2. Inercijska sila u sustavu koji rotira

Ako se sustavu mijenja smjer linearne brzine, on ima radijalno ili centripetalno ubrzanje prema središtu vrtnje. Na česticu u takvu ubrzanom sustavu djeluje sila koja je posljedica tromosti, usmjerena je od središta vrtnje i naziva se centrifugalna sila. To je prividna sila (za razliku od sile interakcije nema para prema trećem Newtonovu zakonu) i jednaka je umnošku mase i iznosa radijalnog ubrzanja:

$$\vec{F}_{cg} = mr\omega^2\vec{r}_0.$$

Primjer 5.2. Svemirski brod oblika automobilske gume (torus) rotira odgovarajućom brzinom. Astronaut u njemu podvrgnut je djelovanju sile od središta vrtnje koja je jednaka po iznosu radijalnom ubrzanju torusa:



Iz fizioloških razloga razlika centrifugalne sile na stopalima i na glavi ne bi smjela biti veća od stotog dijela ubrzanja na površini Zemlje: $\Delta a_{rad} \leq \frac{1}{100} g$.

Ubrzanje na stopalima treba biti približno kao na Zemlji, tj. g , pa slijedi:

$$(a_{rad})_{stopalo} = \frac{4R\pi^2}{T^2} = g \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{R}.$$

Ubrzanje na glavi jednako je $(a_{rad})_{glava} = \frac{4(R-h)\pi^2}{T^2} = g$.

Razlika ubrzanja na stopalima i glavi:

$$(a_{rad}) = a_{stopalo} - a_{glava} = \frac{4R\pi^2}{T^2} - \frac{4(R-h)\pi^2}{T^2} = \frac{4h\pi^2}{T^2} \leq \frac{1}{100} g.$$

Uz gornji izraz za omjer $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{R}$ dobije se $\frac{g}{R} \leq \frac{g}{100h}$.

Za visinu astronauta od 1,85 m izračuna se da polumjer svemirskog broda mora biti veći od 185 metara da ne bi došlo do neprihvatljivog rastezanja astronauta.

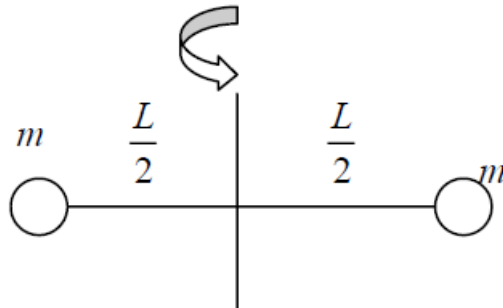
5.1.3. Kinetička energija rotacije

Tijelo koje rotira razdijelimo na skup čestica, izračunajmo kinetičku energiju svake po formuli $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ i zbrojimo sve te energije da bismo dobili energiju tijela

$E_k = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, gdje je m_i masa i-te čestice, a v_i brzina i-te čestice. Kako se te brzine razlikuju jer su čestice različito udaljene od osi vrtnje, uvodimo u formulu kutnu brzinu koja je ista za sve čestice i dobijemo $E_k = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum (m_i r_i^2) \omega^2$.

Izraz u zagradi opisuje raspored masa oko osi rotacije i naziva se moment tromosti I , pa je kinetička energija rotacije dana izrazom (brzina izražena u rad/s) $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Primjer 5.3. Kruto tijelo čine dvije čestice povezane štapom duljine L i zanemarive mase. Kolika je kinetička energija rotacije oko osi kroz sredinu štapa, okomito na njega, ako je kutna brzina 1000 okreta/min, a masa svake čestice je 1 kg, $L = 0,4$ m?



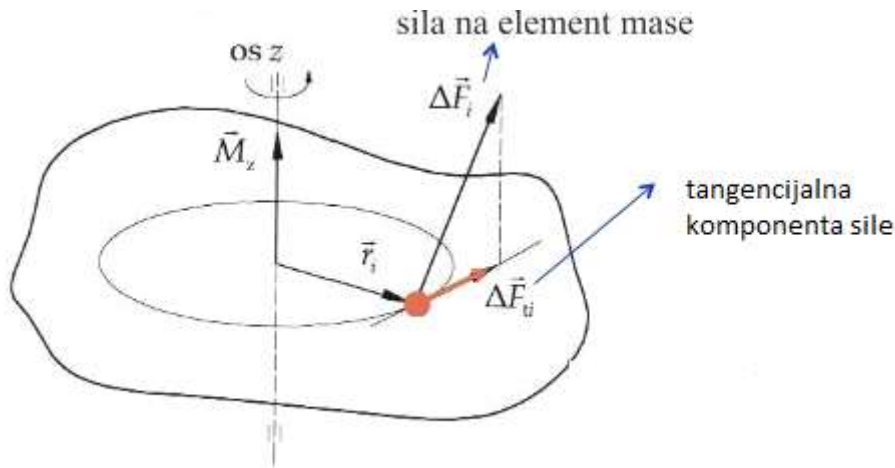
Moment tromosti je $I = \sum m_i r_i^2 = m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2m \frac{L^2}{4} = 0,08 \text{ kgm}^2$.

Kinetička energija jednaka je $E_k = \frac{1}{2} \cdot 0,08 \text{ kgm}^2 \cdot \left(\frac{6280}{60\text{s}}\right)^2 = 428 \text{ J}$.

5.1.4. Moment sile

Ako želite otvoriti vrata, znate da to možete napraviti primjenjujući manju silu što je kvaka udaljenija od ruba vrata gdje prolazi os rotacije i ako je smjer sile okomit na ravninu vrata. To je iskustvo izraženo veličinom koja se naziva moment sile, a jednaka je umnošku sile i udaljenosti pravca na kojem djeluje sila i pravca na kojem je os rotacije (krak sile):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



Slika 23. Moment sile

Jedinica za moment sile je Nm, što dimenzijski odgovara džulu (J), ali moment sile se nikada ne izražava u džulima.

5.2. Temeljni zakon gibanja za rotaciju krutog tijela

Moment sile izaziva rotaciju krutog tijela. Veza između ukupnog momenta sile koje djeluju na tijelo, momenta tromosti tijela i kutnog ubrzanja dana je drugim Newtonovim zakonom za rotaciju:

$$\vec{M}_{ukupni} = I\vec{\alpha}, \text{ gdje je kutno ubrzanje izraženo u rad/s}^2, \text{ a moment tromosti } I \text{ u kgm}^2.$$

Primjer 5.4. Želite baciti protivnika mase 70 kg bočnim džudo zahvatom tako da ga povučete za kimono silom F i krakom sile od 0,25 m od osi rotacije koja se nalazi na vašem desnom boku. Želite postići kutno ubrzanje od -6 rad/s^2 (rotacija je u smjeru gibanja kazaljke na satu).

Moment tromosti vašeg protivnika s obzirom na hvatište na vašem boku je 15 kgm^2 .

U čemu je prednost protivnika prvo podići na bok, a tek onda ga potezanjem rotirati i baciti na pod?

Na vašeg protivnika djeluju tri sile: gravitacijska sila u središtu mase, kontaktna sila N od vašeg boka i sila potezanja F . Ako ste protivnika podigli na bok tako da mu je središte mase iznad hvatišta, onda gravitacijska sila ima krak sile nula. Kontaktna sila očito ima krak sile nula. Preostaje sila potezanja čiji je moment sile negativan i iznosi $-F \cdot r$.

Ako primijenimo drugi Newtonov zakon za rotaciju $M_{ukupni} = I\alpha$ te ako uvrstimo poznate veličine $-F \cdot r = I \cdot \alpha$, dobijemo: $F = \frac{15kgm^2 \cdot (-6rad/s^2)}{-0,25m} = 360N$.

Ako protivnika ne podignemo na bok, pa gravitacijska sila ima krak sile 0,1 m u odnosu na hvatište na boku, onda ta sila djeluje momentom sile u suprotnom smjeru od momenta sile potezanja pa je sada: $r_1 \cdot m \cdot g - F \cdot r = I \cdot \alpha$ i uvrštavanjem:

$$F = \frac{15kgm^2 \cdot (-6rad/s^2)}{-0,25m} + \frac{r_1 \cdot m \cdot g}{0,25m} = 360N + \frac{0,1m \cdot 70kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{0,25m} = 635N.$$

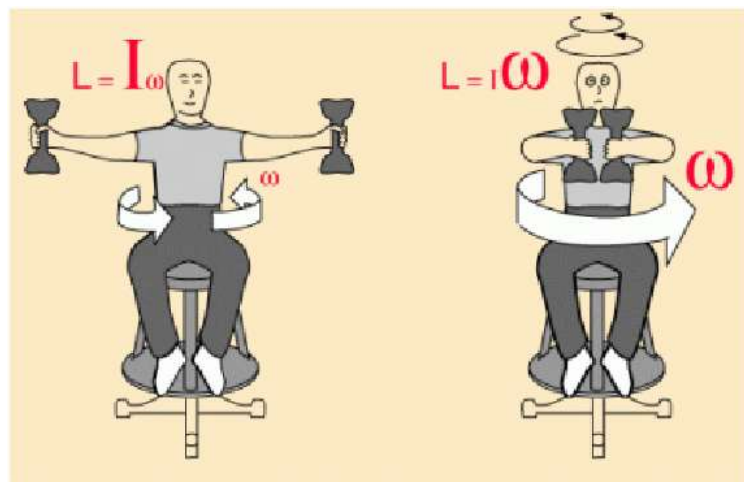
U ovom slučaju treba primijeniti gotovo dvostruko veću silu, pa će karatist uvijek nastojati prvo podići protivnika na bok, a tek onda primijeniti silu potezanja.

5.2.1. Kutna količina gibanja

Za tijelo koje rotira oko fiksne osi i čiji je moment tromosti oko te osi I , kutna količina gibanja je vektor L jednak:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Kutna količina gibanja u zatvorenom sustavu je očuvana veličina.



Slika 24. Kutna količina gibanja

Na primjeru sa slike 24 čovjek na rotirajućoj stolici ima raširene ruke i neku kutnu brzinu. Skupljanjem ruku smanjuje mu se moment tromosti, ali se povećava kutna brzina. Tako je kutna količina gibanja ostala nepromijenjena.

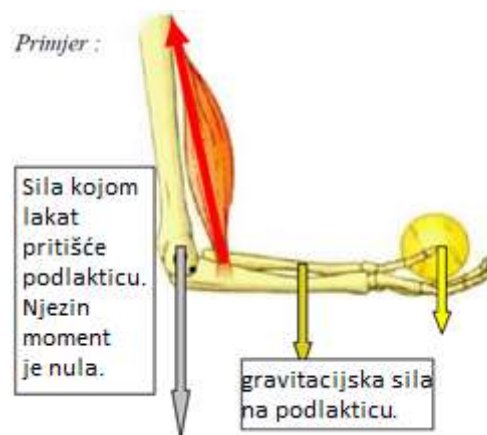
5.3. Uvjeti ravnoteže krutog tijela

Vektorska suma vanjskih sila koje djeluju na tijelo mora biti nula.

Vektorska suma vanjskih momenata sila koje djeluju na tijelo mora biti nula, izmjerena oko bilo koje točke.

$$\text{Uvjet ravnoteže: } \begin{cases} \sum \vec{F}_{ukupna} = 0 \\ \sum \vec{M}_{ukupni} = 0 \end{cases}$$

Primjer 5.5. Masa lopte 1 kg; masa podlaktice sa šakom 2 kg; težište podlaktice udaljeno je 0,2 m od lakta; hvatište mišića je 0,03 m od lakta. Lopta je udaljena 0,35 m od lakta.



Kolika mora biti sila od mišića F da bi podlaktica bila u ravnoteži?

$$\sum M_{ukupni} = -m_{podlaktica} \cdot g \cdot r - m_{lopta} \cdot g \cdot r_1 + r_2 \cdot F = 0$$

$$-2kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0,2m - 1kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0,35m + 0,03m \cdot F \cdot \sin(90^\circ) = 0$$

$$F = 245N$$

6. Gravitacija

Fizika teži naći što manji broj zakona kojima se može objasniti što veći broj naizgled nepovezanih pojava. Prvo veliko ujedinjenje zasluga je Isaaca Newtona koji je 1665. godine pokazao da sila koja drži Mjesec u putanji oko Zemlje ima isto porijeklo kao sila koja je uzrok padu jabuke.

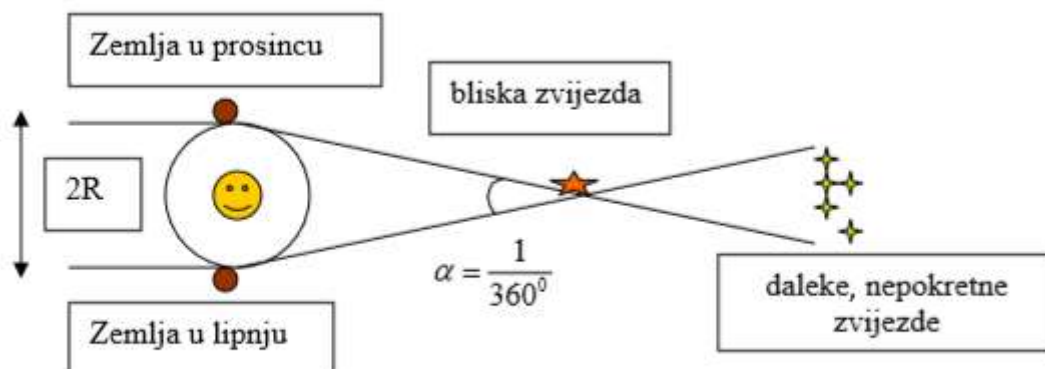
6.1. Na leđima divova

Povijest fizike blisko je povezana s astronomijom pa je zasluga za razumijevanje sile gravitacije koja oblikuje nama poznati svemir nepravedno pripisati jednom znanstveniku. Ako spomen na sve umne ljude koji su povećavali ljudsko znanje o svemiru i našem mjestu u njemu ostavimo povijesti civilizacije, usmjerit ćemo se samo na neposredne Newtonove prethodnike.

Prvi je danski astronom Tycho Brahe (1546. – 1601.) koji je s do tada nezabilježenom preciznosti 20 godina mjerio položaje planeta. Predložio je nebeski sustav kojemu je Zemlja u središtu. Pet tada poznatih planeta gibaju se oko Sunca, a Sunce s planetima oko Zemlje.

6.1.1. Paralaksa zvijezda

Što mislite je li Tycho Brahe bio u stanju primijetiti paralaksu zvijezda?



Ako je kutna granica koju možemo razlučiti golim okom α , a promatramo najbližu zvijezdu iz dvaju položaja Zemlje koji su udaljeni 300 000 000 km, onda bi zvijezda

koju još možemo uočiti paralaksom trebala biti udaljena manje od $r = \frac{l_{AB}}{\alpha}$, tj.

$$r = \frac{300000000}{4,9 \cdot 10^{-5}} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ km} \text{ ili oko 6 milijarda kilometara.}$$

Moderna mjerenja pokazuju da dok se Zemlja pomakne od jednog do drugog položaja (taj put svjetlost prijeđe za 16 minuta), možemo teleskopom uočiti najbližu zvijezdu udaljenu četiri svjetlosne godine pa je kut razlučivanja $\alpha = \frac{16 \text{ min uta}}{4 \text{ godine}} \approx \frac{16}{2102400} \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ radijana}$.

Kako je taj kut manji od $\alpha = \frac{1}{360^0} = 0,5 \cdot 10^{-6}$, koji je mogao postići Tycho Brahe, on nije mogao primijetiti gibanje zvijezda metodom paralakse.

Drugi veliki astronom i matematičar bio je Johannes Kepler.

Na temelju Braheovih podataka Kepler je izveo tri zakona za gibanje planeta:

1. *Planeti se gibaju po eliptičnoj putanji oko Sunca sa Suncem u jednom žarištu.*
2. *Dužina koja spaja Sunce i planet prelazi jednake površine za jednako vremensko razdoblje.*
3. *Omjer $\frac{T^2}{R^3} = \text{konstanta}$ za sve planete gdje je R srednja udaljenost planeta od Sunca, a T je vrijeme potrebno planetu za jedan obilazak oko Sunca.*

Kepler je tako sažeo rezultat Braheova opažanja u kompaktnu matematičku formu, ali nije znao objasniti uzrok pravilnosti gibanja planeta.

6.2. Opći zakon gravitacije

Objašnjenje je ponudio Newton (1642. – 1727.) kad mu je bilo 23 godine.



Slika 25. Isaac Newton i opći zakon gravitacije

Keplerovo odbacivanje kružne putanje planeta bilo je odmak od dogme (vjerovanja koje nije temeljeno na opažanju) koju su astronomi naslijedili od Aristotela. Newton smatra da bi se planeti gibali po pravcu kad ne bi bilo sile koja ih tjera da se gibaju po kružnici.

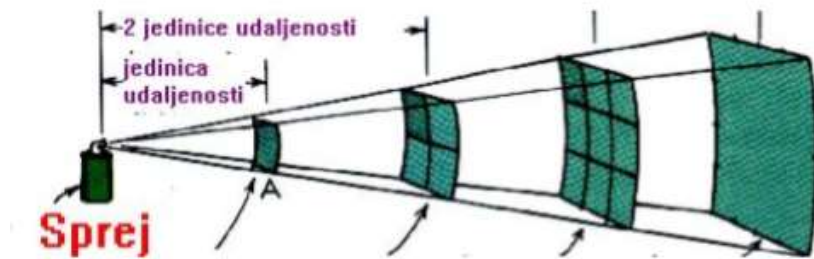
Sila koja djeluje okomito na smjer brzine naziva se centripetalna, a iznos joj je jednak

$$F_{cp} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \text{ Ako hoćemo izbaciti } T \text{ iz jednadžbe, iskoristimo treći Keplerov zakon,}$$

$$T^2 = \frac{R^3}{K}, K \text{ je konstanta, pa se dobije izraz za iznos centripetalne sile: } F_{cp} = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}.$$

Dakle, sila kojom opisujemo gibanje planeta oko Sunca jest proporcionalna masi planeta, a obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti planeta od Sunca.

Zato se taj izraz koji opisuje narav sile naziva *zakonom inverznog kvadrata*.



Slika 26. Zakon inverznog kvadrata

Poopćenje: vrijedi li isti oblik sile i za djelovanje Zemlje na jabuku mase m ? Ako vrijedi,

onda je $F_{Zemlja-jabuka} = 4\pi^2 K_Z \frac{m}{R^2}$, gdje konstanta K_Z izražava jakost Zemlje kao izvora gravitacijskog privlačenja.

Provjera:

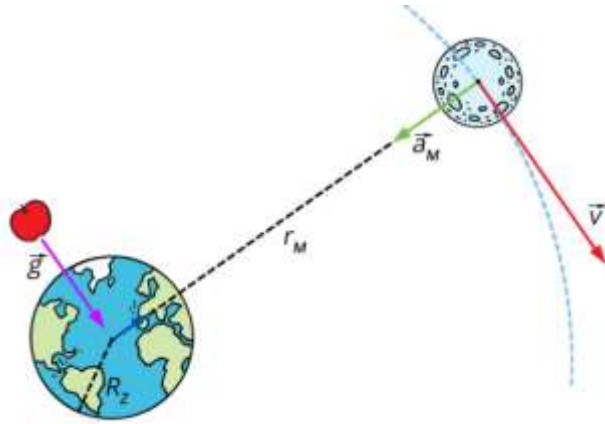
Ako je ubrzanje jabuke na površini Zemlje $g = \frac{F}{m} = 4\pi^2 \frac{K_Z}{R_{Zemlja}^2}$, onda je ubrzanje Mjeseca

prema Zemlji $a_M = \frac{F}{m} = 4\pi^2 \frac{K_Z}{R_{Zemlja-Mjesec}^2}$. Usporedbom tih jednadžbi dobije se:

$$\frac{a_M}{g} = \frac{R_{Zemlja}^2}{R_{Zemlja-Mjesec}^2}. \text{ Newton je znao da je udaljenost do Mjeseca oko 60 puta veća od}$$

polumjera Zemlje, pa se uvrštavanjem tog omjera u prethodnu jednadžbu dobije:

$$\frac{a_M}{g} = \frac{R_{Zemlja}^2}{R_{Zemlja-Mjesec}^2} = \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{3600}, \text{ tj. } a_M = g \cdot \frac{1}{3600} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}.$$



Slika 27. Sustav Zemlja-Mjesec

Točnost računa može se provjeriti iz astronomskih podataka:

period gibanja Mjeseca oko Zemlje je 27,3 dana, udaljenost Zemlje od Mjeseca je 380 000 km

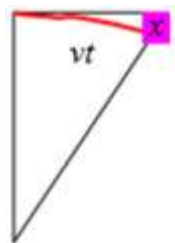
$$\text{pa je ubrzanje: } a_M = 4\pi^2 \frac{R}{T^2} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 380000000m}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2 s^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} ms^{-2}.$$

Geometrijska provjera može se napraviti ako se pretpostavi da je padanje jabuke i Mjeseca jednoliko ubrzano gibanje pa je $\text{put} \approx \text{akceleracija} (s = \frac{1}{2} at^2)$.

Ako jabuka u blizini površine Zemlje u 1 sekundi padne 4,9 m, Mjesec bi trebao pasti 1/3600 puta manje, tj. 1,4 mm. Rastavimo gibanje Mjeseca na jednoliko gibanje po pravcu brzinom prikazanom na slici 28 te na padanje s ubrzanjem a_M na putu x .

$$v = \frac{2R_{\text{Zemlja-Mjesec}}\pi}{T}$$

$$R = 3,8 \cdot 10^8 m$$



Slika 28. Rastavljanje brzine gibanja Mjeseca

Sa slike 28 vidi se da je

$$x = \sqrt{R^2 + \left(\frac{2R\pi}{T}\right)^2} - R, \text{ uz aproksimaciju } (1+x)^2 \approx 1+nx \text{ dobije se}$$

$$x = R\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} - 1\right) = \frac{2\pi^2 R}{T^2} \approx 1,4m.$$

Dobro slaganje ovih rezultata podržalo je Newtona u uvjerenju da je sila između Zemlje i Mjeseca iste naravi kao sila između Sunca i planeta. Koja osobina utječe na konstantu K Zemlje? Što određuje konstantu $4\pi^2 K_S$ kada je Sunce izvor gravitacijske sile?

Najjednostavnija je pretpostavka da konstanta ovisi o masama Zemlje, odnosno Sunca, pa bi bilo:

$$4\pi^2 K_S = m_{\text{Sunca}} \cdot \text{univerzalna konstanta}$$

$$4\pi^2 K_Z = m_{\text{Zemlje}} \cdot \text{univerzalna konstanta}.$$

Ta se nova konstanta naziva univerzalna gravitacijska konstanta, obilježava sa G , a mjerenjima se odredilo iznos od $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Uz takvu oznaku Newtonov opći zakon gravitacije između bilo koja dva tijela s masama m_1 i m_2 , udaljenih za r ima oblik:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Primjer 6.1.

Jupiter ima 300 puta veću masu od Zemlje, pa bi se moglo pretpostaviti da će tijela na njegovoj površini biti gravitacijski privučena s 300 puta većom silom nego na Zemlji. Ipak, tijelo mase m na Jupiteru je privučeno oko tri puta većom silom:

$$\text{gravitacijska sila na Zemlji na tijelo mase } m \text{ je } F_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{Zemlje}}}{R_{\text{Zemlje}}^2}$$

$$\text{gravitacijska sila na Jupiteru na tijelo mase } m \text{ je } F_J = G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{Jupitera}}}{R_{\text{Jupitera}}^2}.$$

Ako je omjer tih sila $\frac{F_J}{F_Z} \approx 3$, tada uz omjer masa $\frac{m_J}{m_Z} \approx 300$ slijedi:

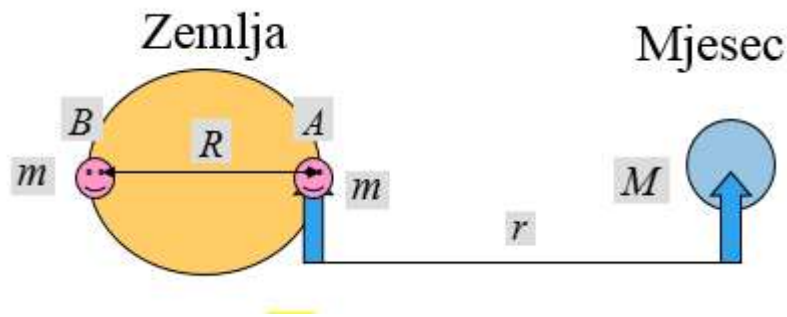
$$3 \approx \frac{F_{\text{Jupitera}}}{F_{\text{Zemlja}}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{Jupitera}}}{R_{\text{Jupitera}}^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{Zemlje}}}{R_{\text{Zemlje}}^2}} = \frac{m_{\text{Jupitera}} \cdot R_{\text{Zemlje}}^2}{m_{\text{Zemlje}} \cdot R_{\text{Jupitera}}^2} = \frac{300 \cdot m_{\text{Zemlje}} \cdot R_{\text{Zemlje}}^2}{m_{\text{Zemlje}} \cdot R_{\text{Jupitera}}^2},$$

pa je $R_{\text{Jupitera}} \approx 10 \cdot R_{\text{Zemlje}}$.

6.3. Primjena zakona gravitacije

Razumijevanje plime i oseke

Od velikog broja primjena izaberimo objašnjenje zašto na promjenu visine mora dva puta dnevno ili na pojavu plime i oseke više utječe Mjesec nego Sunce, iako je gravitacija između Sunca i neke mase m na Zemlji gotovo 200 puta veća nego gravitacija između Mjeseca i te iste mase na Zemlji. Plima i oseka je posljedica razlike gravitacijskog privlačenja duž promjera Zemlje. Ako izračunamo silu na neku masu koja se nalazi na površini Zemlje najbliže Mjesecu i silu na istu masu koja je u središtu Zemlje te podijelimo njihovu razliku s polumjerom Zemlje, odredit ćemo stopu promjene gravitacijske sile duž Zemljina polumjera. Tu veličinu nazivamo gradijent gravitacijske sile.



Slika 29. Utjecaj Mjeseca na Zemlju

Taj je gradijent manji za oko 44 % za privlačenje Sunca i neke mase na Zemlji nego za Mjesec.

$$\text{Gradijent gravitacijske sile: } \frac{\Delta F}{R} = \frac{F_A - F_B}{R} = \frac{G \frac{m \cdot m_M}{r^2} - G \frac{m \cdot m_M}{(r+R)^2}}{R} = \frac{G \frac{m \cdot m_M}{r^2} (1 - (1 + \frac{R}{r})^{-2})}{R}.$$

Ako se primijeni aproksimacija (za mali x) $(1+x)^2 \approx 1+2x$ ($n=2$), za naš slučaj vrijedi aproksimacija $(1 + \frac{R}{r})^n \approx 1 + n \cdot \frac{R}{r}$, gdje je $n = -2$ pa se dobije:

$$\frac{\Delta F}{R} = \frac{G \frac{m \cdot m_M}{r^3} (1 + 2 \frac{R}{r} - 1)}{R}$$

$$\frac{\Delta F}{R} = G \frac{m \cdot m_M}{r^3}$$

Usporedimo li (napravimo omjer) iznose gradijenata za Mjesec i Sunce, dobijemo:

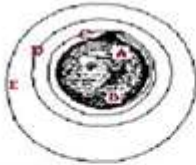
$$\frac{(\frac{\Delta F}{R})_M}{(\frac{\Delta F}{R})_S} = \frac{m_M}{m_S} \cdot (\frac{r_S}{r_M})^3$$

pa se izračuna uz astronomske podatke da je gradijent veći više od dva puta za Mjesec, što znači toliko puta veći utjecaj na plimu i oseku.

Astronomski podatci: $m_M = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $m_S = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $r_M = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$; $r_S = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

6.3.1. Sateliti

Ispaljivanje kugle iz topa s planine



Kako brzina ispaljivanja raste, kugla pada sve dalje, dok ne postane satelit Zemlje.

Ako ispustimo kamen, on pada na tlo vertikalno prema dolje. Ako uz to ima i početnu brzinu u horizontalnom smjeru, kamen se giba po zakrivljenoj putanji, većeg radijusa zakrivljenosti što je brzina veća. Slika 30 prikazuje izvornu Newtonovu skicu. Ako bi početna brzina bila dovoljno velika, kamen pada po putanji čiji je radijus zakrivljenosti postao jednak radijusu Zemlje. Kamen je postao Zemljin satelit (pratitelj).

Slika 30. Newtonova skica o tome kako tijelo postaje Zemljinim satelitom

Najmanja brzina kojom treba izbaciti tijelo sa Zemlje da bi ostalo u Zemljinoj orbiti dobije se iz uvjeta kruženja satelita:

$$F_{\text{centripetalna}} = F_{\text{gravitacijska}} \quad \text{. Tu brzinu zovemo prva kozmička brzina.}$$

$$v = \sqrt{gR} \approx 29000 \text{ km/h}$$

Druga kozmička brzina je brzina potrebna za potpuno odvajanje od Zemlje. Dobije se iz uvjeta da se kinetička energija koju treba dati satelitu zajedno s potencijalnom energijom na površini Zemlje pretvori u potencijalnu gravitacijsku energiju koja je prema dogovoru u beskonačnosti $E_p = 0$.

Kako je kinetička energija u velikoj daljini nula, primjenom očuvanja energije dobije se iznos druge kozmičke brzine:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 - \left(-\frac{GmM_z}{R}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{R}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Obrnuto, predmet, npr. meteor koji dolazi iz svemira, može pasti brzinom koja ne može biti veća od 11,2 km/s.

Kako gravitacija može pomoći svemirskom brodu da dođe primjerice do Saturna?



Slika 31. Povećanje brzine uz pomoć sile gravitacije

Modul Cassini mase 5650 kg, lansiran 15. listopada 1997. pomoću rakete Titan-4, trebao bi nakon 6,7 godina i gotovo 4 milijarde km puta stići do planeta koji je deset puta dalje od Sunca nego Zemlja. Niti najbolje današnje rakete ne mogu dati modulu dovoljnu kinetičku energiju da ode dalje od Venere, Marsa i Jupitera, koje je NASSA istražila. Uz pomoć sile gravitacije, Cassini će dobiti dovoljno energije da istraži i najdalje planete.

Zamisao je da se modul približi nekom planetu, poveća mu brzinu, ali ostane ipak dovoljno daleko da modul ne ostane zarobljen u gravitacijskom polju planeta. Gorivo će trebati samo do prvog planeta, a poslije je put Cassinija besplatan.

7. Krute tvari i fluidi

Atomska hipoteza – materija je građena od atoma. U prirodi ima 90 različitih vrsta atoma. Umjetnih atoma, stvorenih u laboratoriju, ima 16. Od atoma poznatog svemira vodika ima 90 %. Ljudi su građeni od pretežito četiriju elemenata: ugljika, vodika, kisika i dušika.

Pojedinačni atomi ne mogu se izvagati, ili izmjeriti na neki drugi način, stoga su za razvoj atomne teorije iskorišteni neki drugi dokazi. Moderna atomna teorija utemeljena je na Daltonovoj teoriji uz male preinake. Daltonova teorija je imala nedostatke, a najvažniji je bio nemogućnost objašnjenja evidentnog postojanja električnog naboja u okvirima Daltonova modela. John Thomson je otkrio elektron 1897. godine i dao prvi model atomske strukture. Nakon njega svoje su doprinose dali i Ernest Rutherford, Niels Bohr, Louis de Broglie i mnogi drugi. Danas, s razvojem akceleratora čestica otkriveno je mnoštvo elementarnih čestica, postavljen je standardni model čestica.

Materija postoji u četirima stanjima, krutom, tekućem, plinovitom i u obliku plazme. U svim stanjima atomi i molekule neprekidno se gibaju. U krutom stanju atomi se gibaju oko fiksnih položaja. Povećanjem energije molekule se razdvajaju i titraju, ali više ne oko stalnih položaja. Oblik materijala više nije stalan pa nastaju tekućine. Uz još dodane energije materija prelazi u plin. Tekućine i plinovi zajedno se nazivaju fluidi. Dodavanjem energije raste temperatura plina. Elektroni se razdvajaju od jezgri i nastaje plazma.

7.1. Krute tvari

Svojstva krutih tijela mogu se objasniti iz njihove građe. Mnoge krute tvari imaju kristalni oblik. Pravilna građa nekih tvari potvrđena je 1912. godine pomoću rendgenskih ili x-zraka. One čine pravilne oblike koji se nazivaju kristalne rešetke. Atomi koji titraju oko stalnog položaja vezani su električnim vezama.

Mjera kompaktnosti materije je gustoća. To je naziv za omjer mase i volumena komada materijala: $\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$. Najgušći materijal na Zemlji je osmij (22,48 g/cm³).

Pojedinačni atom osmija ima masu manju od atoma zlata ili urana, ali je gušće složen. Ako na kruto tijelo djeluje vanjska sila, može mu promijeniti oblik ili volumen.

Elastičnost je svojstvo tijela da vrati prvotni oblik ili volumen nakon prestanka djelovanja vanjske sile. Iznos elastičnosti, npr. opruge, mjeri se elastičnom silom F koja je prema Hookovu zakonu proporcionalna produljenju opruge: $\Delta \vec{x}, \vec{F} = -k\Delta \vec{x}$, gdje je k konstanta opruge (veća konstanta označuje veću elastičnost), a znak *minus* upućuje na to da je elastična sila kojom se tijelo opire promjeni oblika suprotnog smjera od produljenja.

Skaliranje ili promjena svojstava tijela s promjenom veličine. Ta tema nije izravno povezana s temom o stanju tvari, no uvodimo je zbog didaktičkih razloga, da se temeljne zamisli spomenu u što većem broju prilika. Temeljna zamisao skaliranja je *omjer*, tj. broj koji kaže koliko onoga

u brojniku razlomka stane u jedinični iznos onoga što je u nazivniku. Dobro znani primjer je broj π , koji je omjer opsega bilo koje kružnice O s njegovim promjerom D :

$$\pi = \frac{O}{D} \left[\frac{\text{opseg}}{\text{promjer}} \right].$$

Primjer 7.1. Ako je polumjer Zemlje $R = 6370$ km, onda je uže oko ekvatora dugo $O = 2R\pi$. Koliko bi morao biti dulji konop ako bismo ga svugdje podigli na štap visok 1 metar? Zadatak je jednak pitanju za koliko bi se povećao opseg kružnice kojoj je polumjer veći za 1 metar od polumjera Zemlje. Intuitivno nam se može činiti da bi se opseg kružnice znatno povećao. Izračunajmo promjenu opsega ΔO :

$$\Delta O = O_2 - O_1 = 2R_2\pi - 2R_1\pi = 2\pi \cdot (R_2 - R_1).$$

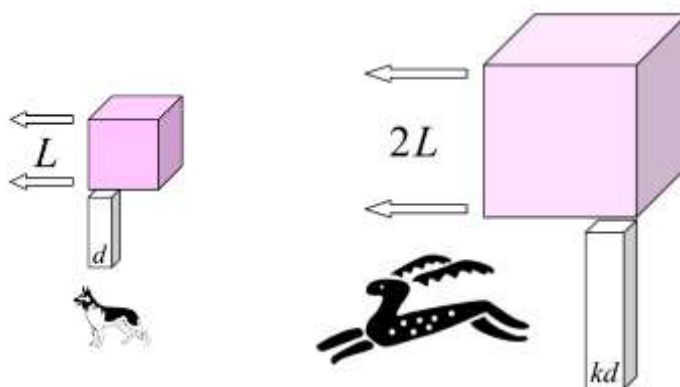
Umjesto uvrštavanja polumjera Zemlje R_1 te računanja povećanog polumjera treba samo uočiti da je $R_2 - R_1 = 1m$ pa je promjena opsega $\Delta O = 2\pi \cdot 1m = 6,28m$.

Jedan sugovornik u Galilejevu djelu „Dvije nove znanosti“ kaže: „Dakle, kako u geometriji sama veličina ne stvara oblik, mislim da se svojstva kružnica, trokuta, valjaka i drugih geometrijskih tijela neće promijeniti promjenom veličine...“

Fizičar mu odgovara: „Općenito mišljenje u ovom je slučaju potpuno pogrešno.“

Razmotrimo nekoliko primjera promjene ponašanja s promjenom veličine: mrav može nositi teret koji znatno premašuje njegovu težinu, dok velike životinje (također i čovjek) to ne mogu. Noge gazele neproporcionalno su tanje nego kod bizona (srodna, veća životinja iz porodice jelena), vjeverica mora stalno jesti da nadoknadi toplinu, dok velika životinja jede jedan put dnevno. Sve te primjere možemo razumjeti primjenom pojma omjera. Pokažimo to na primjeru neproporcionalnog povećanja debljine nogu životinja s povećanjem veličine.

Modelirajmo životinju s kockom duljine brida L , a noge stupom poprečnog presjeka oblika kvadrata stranice d (slika 32).



Slika 32. Odnos debljine nogu i veličine životinje

Neka se linearna dimenzija L trostruko poveća. Ako je debljina noge d , kolika je debljina noge trostruko veće životinje? Kako su kosti životinja građene od istog materijala, granični tlak nakon kojeg kost puca isti je bez obzira na veličinu. Tlak je omjer težine životinje ($\sim L^3$) i površine presjeka noge ($\sim d^2$):

$$p = \frac{\text{težina}}{\text{površina}} \approx \frac{L^3}{d^2}.$$

Za trostruko veću životinju taj je omjer:

$$p = \frac{\text{težina}}{\text{površina}} \approx \frac{(3L)^3}{(kd)^2}.$$

Konstanta k će pokazati za koji je faktor deblja kost veće životinje. Iz zahtjeva da je granični tlak koji može podnijeti kost isti, dobije se:

$$\frac{L^3}{d^2} = \frac{(3L)^3}{(kd)^2} \Rightarrow k = 5,2.$$

Dakle, iako je bizon tri puta veća životinja od gazele, njegove su noge više od pet puta deblje. To bizona čini manje pokretljivim u odnosu na gazelu.

Primjer 7.2. Visina do koje skoči životinja neovisna je o njezinoj veličini.

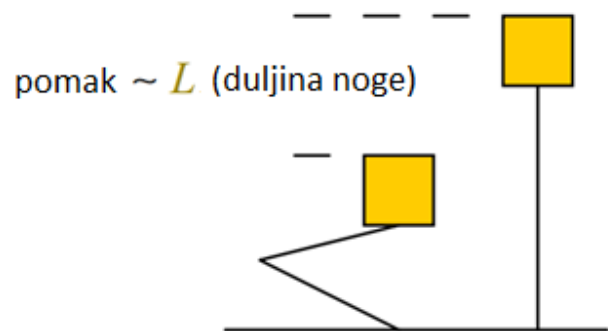
Životinja skače tako što gura pod, a pod prema trećem Newtonovu zakonu gura nju prema gore. Iznos te sile ovisi o jakosti mišića noge koja raste s presjekom mišića, pa ako silu označimo s F , a duljinu noge s L , možemo ustvrditi da je $F_{\text{guranja}} \sim L^2$.

Masa životinje je razmjerna s L^3 .

Ako sila F djeluje na životinju mase m tijekom pomaka dok se noge ne isprave (koji je približno razmjernan s L),

životinja se giba jednoliko ubrzano i postigne brzinu v_0 koja je neovisna o veličini L :

$$v_0^2 \approx 2ax \approx 2 \frac{F}{m} x \approx \frac{L^2}{L^3} \cdot L \approx \text{konstanta}.$$



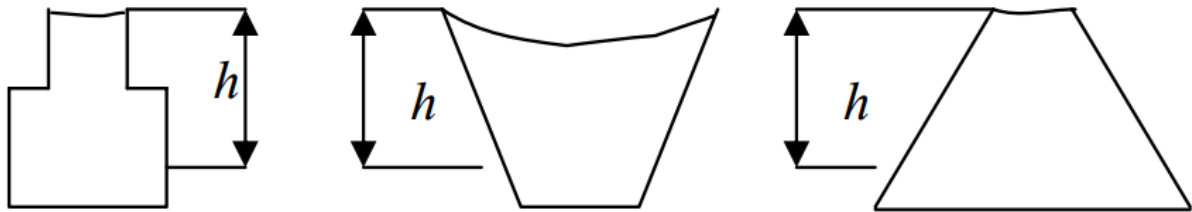
Slika 33. Odnos pomaka i duljine noge

7.2. Tekućine

Tvari u tekućem agregacijskom stanju imaju manji stupanj uređenosti strukture od tvari u čvrstom agregacijskom stanju. Između čestica u tekućini udaljenost je veća zbog slabijih privlačnih sila. Zato se čestice u tekućini relativno slobodno gibaju i lako mijenjaju položaj. Tekućina u posudi djeluje silom F na stijenke posude površine S , stvarajući tako tlak. Tlak je po formuli jednak:

$$p = \frac{F}{S} [\text{Pa}]. \text{ Jedinica za tlak je paskal (Pa).}$$

Hidrostatski tlak je posljedica težine tekućine i jednak je $p = \rho \cdot g \cdot h$, gdje je ρ gustoća, a h dubina tekućine. Tlak ne ovisi o volumenu tekućine, tako da je tlak na branu isti neovisno o tome zatvara li ocean ili usku posudu jednake dubine. Također ne ovisi o obliku niti o veličini površine tekućine.



Slika 34. Ovisnost tlaka o visini

Tlak je po formuli jednak $p = \rho g h$.

Tlak u tekućini djeluje u svim smjerovima. To je Pascalov zakon. Tekućina u posudi tlači stijenku okomito na stijenku i to tako da tlak raste s dubinom.

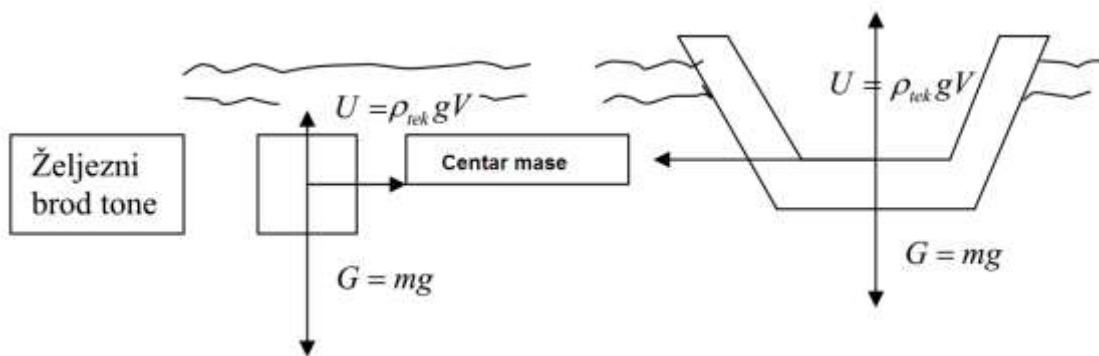
Uzgon je sila koja djeluje prema gore na tijelo uronjeno u tekućinu (također i u plin), a iznosi $F_{uzgona} = \rho_{tekućine} \cdot g \cdot V_{uronjenog\ dijela\ tijela}$.

Kada tijelo pliva? Uvjet je plivanja da sila uzgona bude jednaka gravitacijskoj sili na tijelo:

$$\rho_{tekućine} \cdot g \cdot V_{uronjenog\ dijela\ tijela} = \rho_{tijela} \cdot g \cdot V_{cijeli},$$

a to će biti ako je gustoća tekućine jednaka ili veća od gustoće tijela koje pliva.

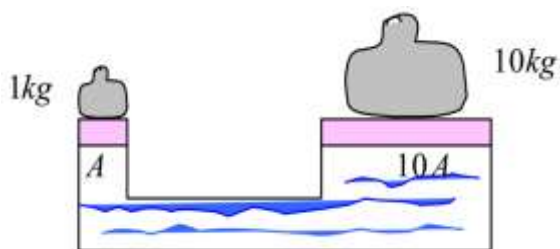
Brod plovi iako je napravljen od željeza gustoće 7,6 puta veće od gustoće vode, zato što zbog svojeg oblika ima srednju gustoću (gustoća zraka i gustoća željeza) manju od gustoće vode.



Slika 35. Prikaz kada tijelo pliva na vodi

Hidraulička preša je stroj koji povećava primijenjenu silu. Ako vanjska sila djeluje na manju površinu, u jednom cilindru preše pojavi se veća sila na većoj površini drugog cilindra. To je zato što se promjena tlaka u jednom dijelu fluida, prema Pascalovu zakonu, prenosi u sve njegove dijelove.

Primjer 7.3. Silom od 10 N koja djeluje na površini A , postiže se sila od 100 N (podiže teret od 10 kg) na deset puta većoj površini.



$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{10A}{A} \cdot 10N = 100N$$

Zbog zakona o očuvanju energije, $F\Delta x = const$, sila F_2 djeluje na 10 puta manjem putu.

7.3. Plinovi

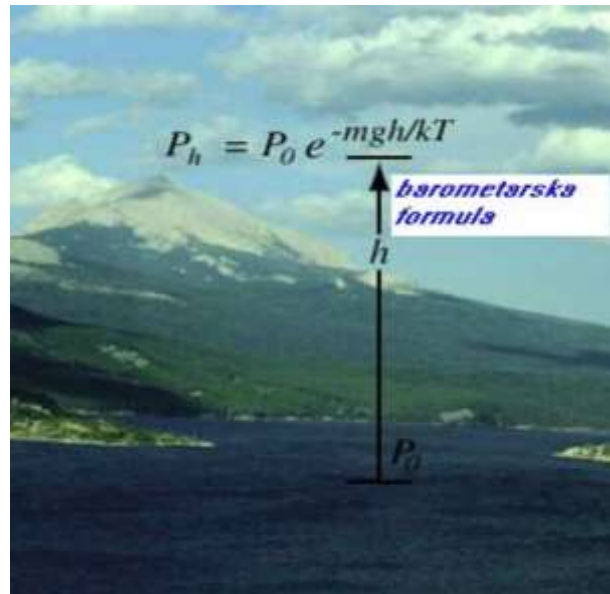
U plinovima su privlačne sile među molekulama slabije nego u tekućinama. Molekule se gibaju nasumično, sudaraju međusobno i sa zidovima posude u kojoj se nalaze, ali bez promjene iznosa brzine (elastični sudari). Plin u kojem se mogu zanemariti privlačne sile naziva se idealni plin. Pri normalnim uvjetima zrak je idealni plin. Plin se širi neograničeno, osim ako ga gravitacijska sila ne drži, kao što je slučaj s atmosferom Zemlje. Atmosfera ne bi postojala kad bi na molekule zraka djelovala samo gravitacijska sila, već bi plin ležao pri površini Zemlje u sloju od oko 10 metara.

Ali, zbog radijacijske energije koju daje Sunce, molekule zraka gibaju se do oko 30 km iznad tla. Pritom je zrak sve rjeđi što je dalje od Zemlje. Čak se i u međuzvjezdanom prostoru može naći po jedna molekula u 1 m^3 prostora, uglavnom vodika. Do visine od 5,6 km je 50 % atmosfere, do 11 km je 75 % atmosfere, do 17,7 km je 90 %, a do visine od 30 km nalazi se 99 % atmosfere. Zrak čini 78,08 % dušik, 20,95 % kisik, 0,93 % argon i 0,03 % ugljični dioksid.

Atmosfera stvara tlak zbog težine zraka. Stupac zraka visine atmosfere, osnovice 1 m^2 ima težinu od 10 000 kg. Taj se tlak na dnu stupca definira kao 1 atmosfera ($1 \text{ atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$).

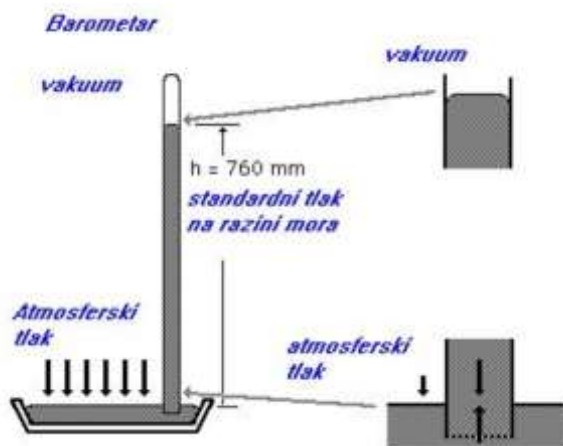
Ako je tlak atmosfere na morskoj razini p_0 , onda je na visini h tlak dan barometarskom formulom sa slike, u kojoj je m masa jedne molekule, k je Boltzmannova konstanta koja iznosi $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$,

T je temperatura, npr. ako je tlak $p_0 = 760 \text{ mm}$ stupca Hg, pri temperaturi od 300 K na visini od 500 metara tlak je 718 mm Hg.



Slika 36. Barometarska formula

Uređaj za mjerenje atmosferskog tlaka naziva se barometar.



Slika 37. Barometar

Sastoji se od cijevi napunjene tekućinom, obično živom, otvorenim krajem uronjenim u posudu sa živom. Na površinu žive u posudi djeluje atmosferski tlak koji se prenosi u cijev i podiže živu do visine h , dok se njezin hidrostatski tlak ($p = \rho \cdot g \cdot h$) ne izjednači s atmosferskim. Na vrhu cijevi je vakuum koji ne tlači na živu. Visini $h = 760 \text{ mm}$ odgovara standardni tlak (0°C na razini mora).

Taj se tlak može izraziti i drugim jedinicama za tlak:

$$760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ tora} .$$

Unutar katodne cijevi tlak je 10^{-6} tora. Na udaljenosti od 500 km od Zemlje (područje umjetnih satelita) tlak je 10^{-10} tora.

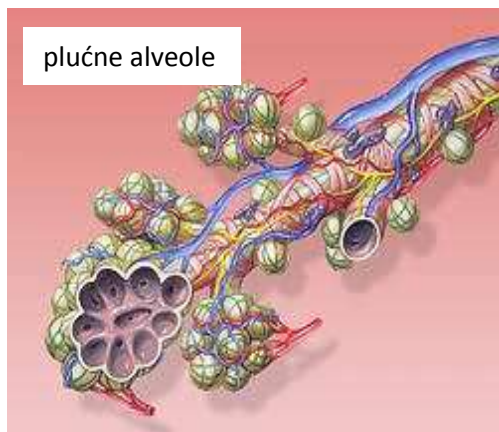
Plinski zakoni opisuju stanje plina i promjenu stanja s pomoću četiri empirijske termodinamičke veličine: temperature plina T izražene u Kelvinovoj ljestvici, volumena plina V , tlaka plina p i količine plina izražene kao broj čestica plina N ili kao broj mola n . Opći plinski zakon je oblika:

$$pV = NRT = nkT.$$

R je oznaka za opću plinsku konstantu, $R = 8,31$ J/mol K, a k je Boltzmannova konstanta. Ako se stanje plina mijenja uz stalnu temperaturu, taj zakon ima oblik:

$pV = \text{konstanta}$ (Boyl-Mariottov zakon).

Primjer 7.4. Kad bi ronilac na dubini od 10,3 metara udahnuo sabijeni zrak iz boce i držao ga u plućima dok ne izroni na površinu, koliko bi se povećao volumen pluća? Ako pretpostavimo da se temperatura mora nije mijenjala od dubine 10,3 metra do površine, onda promjenu stanja zraka u plućima možemo opisati Boylovim zakonom. Slika lijevo prikazuje plućne mjehuriće,



alveole, koje se šire pri udisaju od promjera otprilike 0,05 mm do oko 0,1 mm.

U slučaju ronioca iz gornjeg primjera umnožak tlaka i volumena u plućima mora ostati stalan:

$$p_{10,3} \cdot V_{10,3} = p_{\text{površini}} \cdot V_{\text{površini}}$$

pa ako je tlak na dubini od 10,3 m jednak:

$$p_{10,3\text{ m}} = p_0 + pgh = p_0 + (10^3 \cdot 9,81 \cdot 10,3) \text{ Pa} = 2p_0,$$

a na površini p_0 ,

onda je $V_{\text{površini}} / V_{10,3\text{ m}} = p_{10,3\text{ m}} / p_{\text{površini}} = 2$, dakle volumen pluća narastao bi dvostruko.

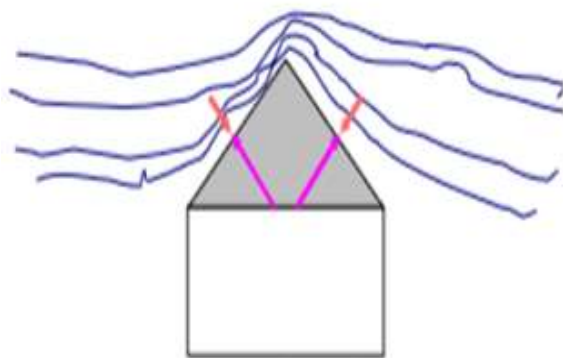
Očito je da naglo izranjanje u kojem ronilac nema vremena ispuhati zrak čak i s tako male dubine može biti vrlo opasno jer su alveole već pri udisaju bile raširene i dalje se ne mogu znatno širiti već pucaju.

Bernoullijeva jednadžba u toku fluida (tekućine ili plina) gdje nema izmjene energije s okolinom, zbroj kinetičke energije fluida, energije vezane sa statičkom tlakom (za tekućine je to hidrostatski tlak) i potencijalne gravitacijske energije fluida, jest konstantna. Izraženo

jednadžbom $Fx + \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const.}$, u kojoj je F sila zbog statičkog tlaka koji djeluje duž

pomaka x , m je masa fluida, v njegova brzina, h je visinska razlika u gravitacijskom polju. Ako tu jednadžbu podijelimo s volumenom fluida, dobijemo gustoću energije. Uočavanjem da je m/V gustoća fluida, a Fx/V statički tlak fluida, gornja jednadžba poprima oblik:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const.}$$



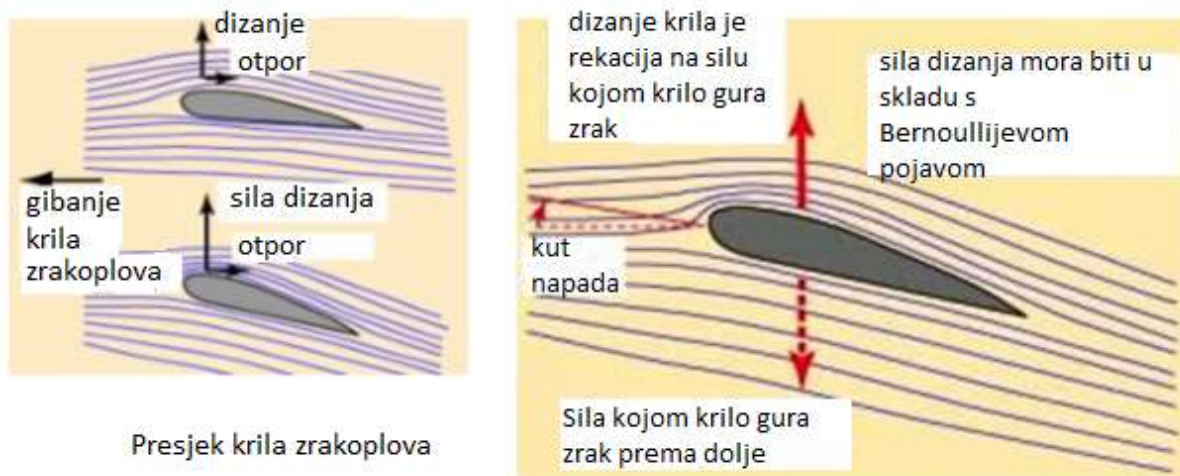
strujnice zraka pri krovu

Slika 38. Sile dizanja na primjeru krova

Kada fluid ulazi iz šire cijevi presjeka A_1 u užu cijev presjeka A_2 , zbog nestlačivosti tekućine (dakle za isto vrijeme volumen $S \cdot v \cdot t$ mora proći kroz cijevi različitog presjeka) brzina fluida se mora povećati. Ako se pak brzina fluida povećala, prema Bernoullijevoj jednadžbi statički tlak mora se sniziti. Zato na mjestu veće brzine tlak pada i ta se činjenica koristi da bi se dijelom objasnio nastanak sile dizanja koja omogućuje da zrakoplov ne padne pri letu ili za objašnjenje zakretanja lopte koja se giba u zraku, a uz to rotira. Objašnjenje sile dizanja s pomoću Bernoullijevih pojava može se temeljiti

na silnicama: gdje su silnice fluida prikazane gušće hoće se naznačiti veća brzina fluida i manji statički tlak. Npr. sila koja podigne krov nastaje jer je brzina fluida veća s gornje strane krova nego s donje, gdje je fluid u mirovanju (slika 38). Razlika tlakova ne mora biti velika, ali djeluje na veliku površinu pa je sila dizanja velika.

Objašnjenje dizanja zrakoplova s pomoću Bernoullijevih pojava prihvatljivo je ako presjek krila zrakoplova ima nesimetričan oblik:



Slika 39. Sile dizanja na primjeru krila zrakoplova

Može se pokazati da će i simetrična ploha letjeti (pojavi se sila dizanja) ako je kut napada α različit od nula. Dakle, sila dizanja zrakoplova rezultat je reakcije na guranje molekula zraka prema dolje, ali je pojačana nesimetričnim oblikom krila zrakoplova.

8. Titranje

Titranje je periodično gibanje. Vrijeme jednog titraja je T , a broj titraja u jednoj sekundi je frekvencija koja se označuje sa f . Jedinica za frekvenciju je herc (hertz), a znak Hz:

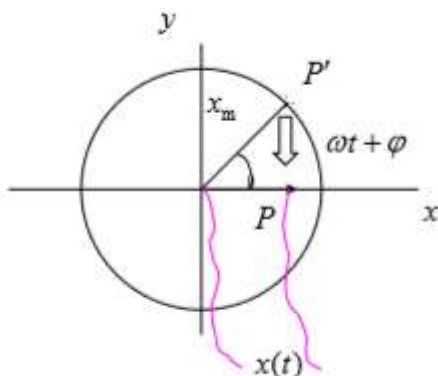
$1 \text{ Hz} = 1 \text{ titraj u sekundi} = \text{s}^{-1}$.

Dakle, vremenski razmak potreban za

jedan titraj izražen formulom: $T = \frac{1}{f}(\text{s})$.

8.1. Jednostavno harmonijsko gibanje

Bilo koje gibanje koje se ponavlja u pravilnim razmacima naziva se periodično gibanje ili harmonijsko gibanje. Jednostavno harmonijsko gibanje posebna je vrsta periodičnog gibanja. Jednostavno harmonijsko gibanje je gibanje „amo-tamo“ koje izaziva sila proporcionalna pomaku (otklonu) iz ravnotežnog položaja. Jednostavno harmonijsko gibanje je projekcija jednolikog gibanja po kružnici na promjer kružnice po kojoj se tijelo giba.



Slika 40. Projekcija jednolikog gibanja po kružnici na promjer kružnice

Kutni položaj u nekom trenutku određen je kutom $\omega t + \varphi$, gdje je kut φ kutni položaj u trenutku $t = 0$ sekunda (naziva se fazni pomak). Projekcija položaja tijela P' na x os je točka P koja određuje položaj $x(t)$. Ako je polumjer kružnice x_m , onda je $x(t) = x_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

Kako se kosinus funkcija mijenja od -1 do $+1$, to se pomak $x(t)$ mijenja od maksimalnog pomaka (amplitude) lijevo od ishodišta do maksimalnog pomaka desno od ishodišta.

Veličina x_m naziva se amplituda gibanja, $x(t)$ je pomak, $\omega \cdot t + \varphi$ je faza gibanja, a φ je fazna konstanta ili fazni pomak, ω se naziva kutna frekvencija ili kutna brzina. Kutna brzina ω se

definira: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Jedinica za kutnu frekvenciju je radijan u sekundi [s^{-1}].

Može se pokazati da je brzina tijela koje se giba jednostavno harmonijski:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

dok je ubrzanje tijela dano izrazom: $a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, a to se može napisati kao

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t),$$

tj. ubrzanje je proporcionalno pomaku, ali suprotno po smjeru, a konstanta proporcionalnosti je kvadrat kutne frekvencije.

Titranje opruge



Slika 41. Opruga

Ako se opruga rastegne iz ravnotežnog položaja (nerastegnuta opruga), tj. iz točke O (tu je $x = 0$ metara) do položaja x , na oprugu djeluje povratna sila $\vec{F} = -k\vec{x}$. Ta sila će biti uzrok ubrzanja za koje smo rekli da je

$a = -\omega^2 x$. Kombiniranjem drugoga Newtonova zakona s izrazima za povratnu silu i ubrzanje dobije se: $F = ma \rightarrow -kx = -m\omega^2 x$,

pa slijedi da je $k = \omega^2 m$,

a iz te formule i izraza $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dobije se za period jednostavnog oscilatora:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Primjer 8.1. Neka tijelo sa slike 41 ima masu 200 grama, a konstanta opruge je $k = 20$ N/m. Tijelo se povuče iz ravnotežnog položaja (tu je $x = 0$ metara) za 5 centimetara i pusti. Taj trenutak odaberemo da je $t = 0$ sekunda. Trenje zanemarujemo. Kolika je kutna frekvencija gibanja, frekvencija, period, amplituda, iznos najvećeg ubrzanja, fazna konstanta i izraz za pomak tijela vezanoga za oprugu?

Temeljna je zamisao da tijelo vezano za oprugu čini jednostavni harmonijski oscilator kutne

frekvencije
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20 \frac{N}{m}}{0,02 \text{ kg}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Onda je frekvencija jednaka
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi \text{ rad}} = 1,59 \text{ Hz},$$

a period T jednak je:
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,59 \text{ Hz}} = 0,63 \text{ s}.$$

Amplituda odgovara početnom položaju $x_m = 5$ cm. Najveće ubrzanje je pri najvećem pomaku

pa je: $a_m = \omega^2 \cdot x_m = (10 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot 0,05 \text{ m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Uvrštavanjem početnog uvjeta (za $t = 0$ s vrijedi $x(t) = x_m$) u izraz za pomak dobije se fazna konstanta: $x(t) = x_m \cos(\omega \cdot 0s + \varphi) \rightarrow \cos \varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$.

Izraz za pomak je: $x(t) = x_m \cos(\omega \cdot t + \varphi) = 0,05 \text{ m} \cdot \cos(10 \text{ rad/s} \cdot t)$.

8.2. Računanje gibanja tijela na opruzi metodom diferencijalnih jednačija

Sustavan pristup rješavanju gibanja oscilatora (odrediti pomak, brzinu i ubrzanje) jest napisati drugi Newtonov zakon, uvrstiti izraz za povratnu silu $\vec{F} = -k\vec{x}$,

dobiti diferencijalnu jednačbu $-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$, koja se preuredi u oblik $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

(gdje je $\omega^2 = \frac{k}{m}$), te ju riješiti metodom razdvajanja varijabla, tako da je pomak dan izrazom

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi), \text{ brzina } v(t) = \frac{dx}{dt}, \text{ ubrzanje } a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Takav pristup koji omogućuje naći pomak u bilo kojem trenutku (a onda i brzinu i ubrzanje) potpuno zadovoljava kada nema trenja. Ali, ako na tijelo djeluju sile koje ovise o položaju, brzini i karakteristikama tijela, može se dobiti diferencijalna jednačba koju nije moguće riješiti. U tom slučaju koristi se pristup diferencijalnih jednačija, koji smo demonstrirali u primjeru gibanja tijela u gravitacijskom polju.

Opis pomoću diferencijalnih jednačija

Krenimo od drugoga Newtonova zakona gibanja: $F = ma = m \frac{dv}{dt}$ i uvrštavanjem izraza za

povratnu silu (elastičnu silu opruge), koji je $F = -kx$, dobijemo diferencijalnu jednačbu

$$\Delta v = -\frac{k}{m} \cdot x \cdot \Delta t. \text{ To je promjena brzine tijekom intervala } \Delta t \text{ zbog djelovanja povratne sile.}$$

Tijelo se, jer ima brzinu v , tijekom tog intervala pomakne za $\Delta x = v\Delta t$. Novi položaj i nova brzina jesu:

$$x_{\text{novi}} = x_{\text{stari}} + \Delta x = x_{\text{stari}} + v_{\text{novi}} \cdot \Delta t$$

$$v_{\text{novi}} = v_{\text{stari}} + \Delta v = v_{\text{stari}} - \frac{k}{m} \cdot x_{\text{stari}} \cdot \Delta t.$$

Primjer 8.2. Gibanja tijela mase 200 g vezano za oprugu konstante $k = 10 \text{ N/m}$, razmaknutog iz ravnotežnog položaja za 5 cm i puštenog u trenutku $t = 0$ s.

Položaj računati svakih 0,02 s. Trenje zanemariti.

Rješenje: Mjerna jedinice (u svakom koraku) za pomak Δx je metar, za brzinu je m/s, a za akceleraciju je ms^{-2} .

1. korak:

$$\Delta \cdot x = 0 \cdot 0,02 = 0 \quad \Delta \cdot v = \left(-\frac{10}{0,2}\right) \cdot 0,05 \cdot 0,02 = -0,05$$
$$x_{\text{novi}} = 0,05 + 0 = 0,05 \quad v_{\text{novi}} = 0 + (-0,05) = -0,05 \quad a = -\frac{10}{0,2} \cdot -0,05 = -2,5$$

2. korak:

$$\Delta \cdot x = -0,05 \cdot 0,02 = -0,001 \quad \Delta \cdot v = \left(-\frac{10}{0,2}\right) \cdot 0,05 \cdot 0,02 = -0,05$$
$$x_{\text{novi}} = 0,05 + 0,001 = 0,049 \quad v_{\text{novi}} = -0,05 - 0,05 = -0,1$$
$$a = -\frac{10}{0,2} \cdot 0,49 = -2,45$$

3. korak:

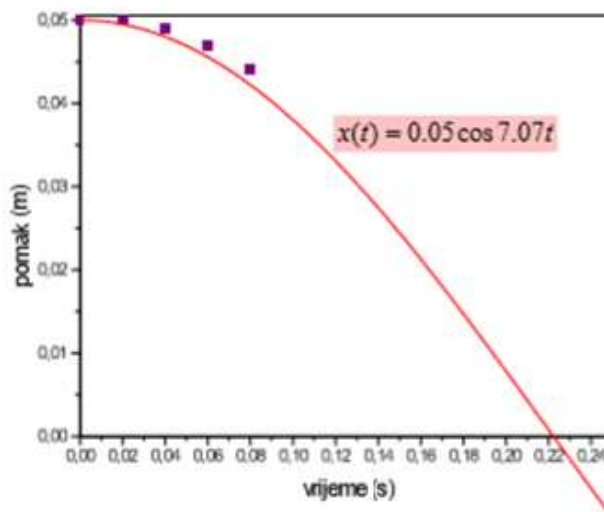
$$\Delta \cdot x = -0,1 \cdot 0,02 = -0,002 \quad \Delta \cdot v = \left(-\frac{10}{0,2}\right) \cdot 0,49 \cdot 0,02 = -0,049$$
$$x_{\text{novi}} = 0,049 - 0,002 = -0,047 \quad v_{\text{novi}} = -0,1 + (-0,049) = -0,15$$
$$a = -\frac{10}{0,2} \cdot 0,49 = -2,47$$

4. korak:

$$\Delta \cdot x = -0,15 \cdot 0,02 = -0,003 \quad \Delta \cdot v = \left(-\frac{10}{0,2}\right) \cdot 0,47 \cdot 0,02 = -0,047$$
$$x_{\text{novi}} = 0,047 - 0,003 = -0,044$$
$$v_{\text{novi}} = -0,15 + (-0,047) \approx -0,2$$
$$a = -\frac{10}{0,2} \cdot 0,044 \approx -2,2$$

Egzaktno rješenje ovog oscilatora: $x(t) = 0,05m \cdot \cos(7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t)$.

U trenutku $t = 0,08$ s pomak bi bio $x(0,08) = 0,042$ cm, što je dobro slaganje s numeričkim rješenjem.



Ljubičasti kvadrati na slici označuju položaje tijela izračunane metodom diferencijalnih jednačina (korak po korak). Crvena krivulja je prikaz funkcije kosinus s amplitudom 0,05 m i

$$\text{kutnom frekvencijom } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,2}} \approx 7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

8.2.1. Energija oscilatora

Da bi se rastegnula opruga za pomak x od ravnotežnog pomaka, trebalo je savladati elastičnu silu i izvršiti rad. Taj rad odgovara površini (trokut sa stranicama pomak i sila) ispod grafa sila – pomak:

$$W = \frac{1}{2} F \cdot x = \frac{1}{2} k \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

Kada je opruga najviše rastegnuta, ima maksimalnu

$$\text{potencijalnu energiju } E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

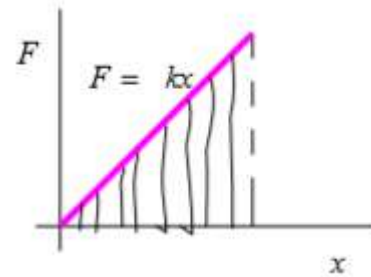
Primjena modela titranja mase na opruzi je raznolika:

- atomi u krutom tijelu titraju kao da su mase povezane oprugom konstante k

- titranje zgrada, mostova i bilo kojeg mehaničkog sustava može se prikazati modelom titranja mase na opruzi

- titranje naboja u električnom titrajnom krugu

- varijacija akustičnog tlaka u glazbenom instrumentu.



Slika 42. Površina ispod $F = kx$ grafa

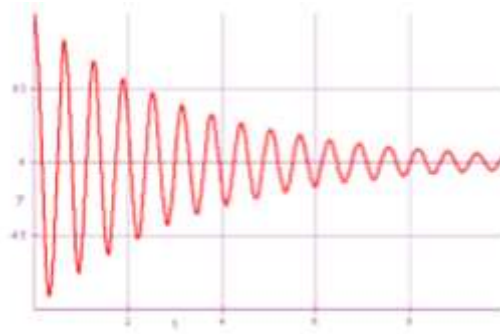
8.2.2. Prigušeno gibanje opruge

Svaki realni sustav, pa i opruga, gubi energiju zbog trenja, tako da jednom pobuđena, ne titra stalno istom amplitudom. Amplituda se smanjuje i nakon određenog broja titraja pada na nulu. Ako je sila trenja proporcionalna brzini oscilatora, gdje je $F = -k_1 v$ konstanta gušenja, onda diferencijalna jednačina gibanja ima oblik:

$$-kx - k_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Metodom korak po korak numerički se rješava položaj i brzina gibanja oscilatora isto kao za gibanje opruge bez trenja. Promjena brzine sada je dana izrazom:

$$\Delta v = \frac{kx - k_1 v}{m} \cdot \Delta t.$$



Slika 43. Prigušeno gibanje opruge

8.3. Prisilno titranje i rezonancija

Razlikujemo prirodno ili slobodno titranje od prisilnog titranja.

U prvom slučaju oscilator se pomakne iz ravnoteže u početni položaj i pusti samostalno titrati (moguće ga je i gurnuti s početnom brzinom). Ako nema gušenja, on titra svojom prirodnom ili vlastitom frekvencijom ω . U drugom slučaju vanjska periodična sila na neki način djeluje na oscilator, npr. guranje djeteta koje sjedi na ljuljački (slika 44).

Jednadžba gibanja ima oblik:

$$kx + k_1 \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \cos(\omega t),$$

gdje je ω frekvencija pobudne sile, a F_0 njezina amplituda. Rješenje te diferencijalne jednadžbe sastoji se od dvaju članova od kojih prvi opisuje kako se mijenja položaj oscilatora tijekom prijelaznog razdoblja, dok drugi opisuje gibanje poslije toga s frekvencijom pobude. Krivulja koja pokazuje odgovor (iznos amplitude) oscilatora na promjenu frekvencije sile pobude naziva se rezonantna krivulja. Amplituda je najveća kada je frekvencija sile pobude ω jednaka vlastitoj frekvenciji oscilatora. Pojava da oscilator prima iz okoline najviše energije naziva se *rezonancija*.

Prisilno titranje može biti štetno i nastoji ga se izbjeći (gibanje motora pobuđuje na titranje ostale dijelove automobila, vjetar djeluje na građevine, savijanje metalnih dijelova izaziva zamor materijala i pucanje), ali može imati i povoljan učinak (pobuda molekula vode u hrani u mikrovalnoj pećnici, elektromagnetska pobuda električnog napona u anteni).

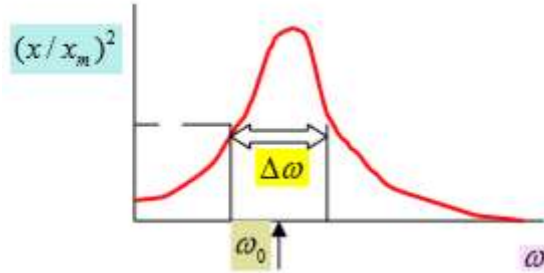
Faktor dobrote Q je kvantitativna mjera sklonosti oscilatora da primi energiju iz okoline, a približno označuje broj titraja koje oscilator napravi nakon što se pobudi dok ne preda svu energiju okolini.



Slika 44. Guranje djeteta na ljuljački

Može se izračunati iz izraza: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$,

gdje je ω vlastita frekvencija oscilatora, a $\Delta\omega$ je širina rezonantne krivulje na pola njezine visine.



Slika 45. Prikaz rezonantne krivulje

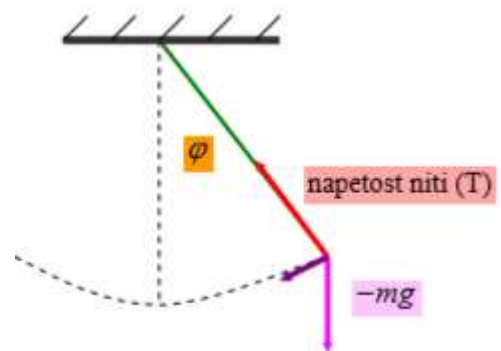
Niske vrijednosti faktora dobrote vezane su s jako gušenim oscilatorima, koji se umire vrlo brzo nakon prestanka djelovanja pobude. Takav je slučaj s ovjesom automobila (amortizeri) koji preuzima energiju pobude, npr. neravnine na cesti, i nakon jednog titraja se umiri. Visoke vrijednosti pokazuju slabo gušenje i usku rezonantnu krivulju.

To su oscilatori koji se ne pobuđuju ni na kojoj frekvenciji osim na rezonantnoj (onda snažno) i nakon pobude dugo titraju.

Primjer je žica gitare koja napravi oko 1000 titraja nakon pobude.

Malo tijelo mase m obješeno na niti duljine l zanemarive mase naziva se matematičko ili jednostavno njihalo. Njihalo je oscilator koji se giba kao jednostavni titrajni sustav kada ga se odmakne iz ravnotežnog pomaka za male kutove.

Period njihala izračuna se prema formuli: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.



Slika 46. Jednostavno matematičko njihalo

Primjer 8.3.

Njihalo se može upotrijebiti kao dio satnog mehanizma za određivanje vremena. Kolika bi duga morala biti nit matematičkog njihala da bi period njihala bio jedna sekunda?

Rješenje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 g T^2}$$

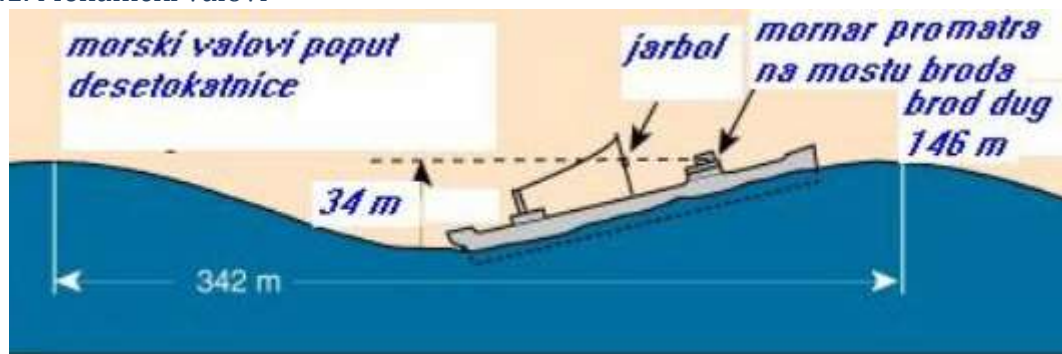
$$L = 0,25 \text{ m}$$

9. Valovi

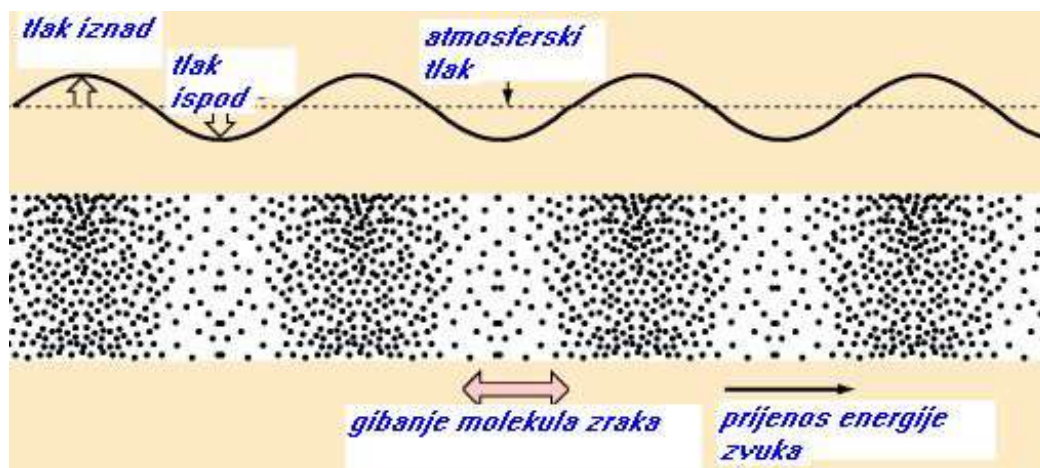
Pojam čestice i pojam vala dva su značajna, suprotstavljena fizikalna pojma klasične fizike. Riječ čestica označuje koncentriranu nakupinu tvari koja može prenositi energiju, a val označuje široko raspodijeljenu energiju koja ispunjava prostor kroz koji se prenosi. U prvih osam poglavlja proučavali smo ponašanje čestica. Slijedi proučavanje valnih svojstava.

9.1. Vrste valova

9.1.1. Mehanički valovi



Slika 47. Morski valovi koje je susreo brod Sjedinjenih Američkih Država Ramapo 1933. g. u izuzetnoj oluji.



Slika 48. Valovi zvuka

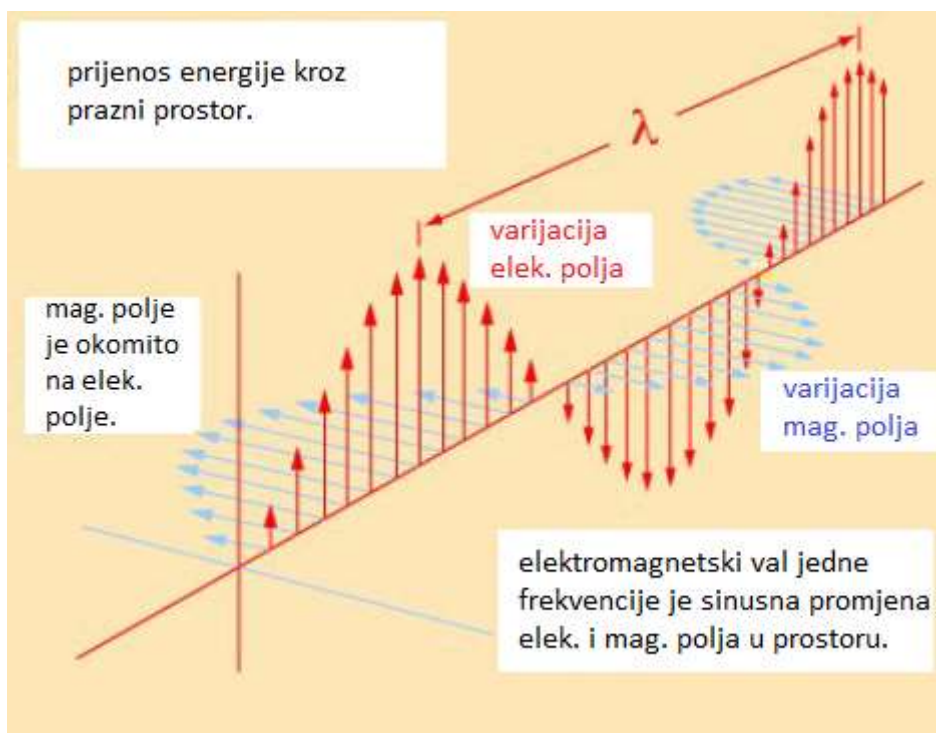
Valove zvuka čini varijacija tlaka oko atmosferskog tlaka na nekom mjestu u zraku.



Slika 49. Seizmički valovi

Svi se ti primjeri mogu opisati Newtonovim zakonima i postoje u elastičnom sredstvu kao što je zrak, stijena ili voda. Brzina njihova širenja ovisi o sredstvu.

9.1.2. Elektromagnetski valovi

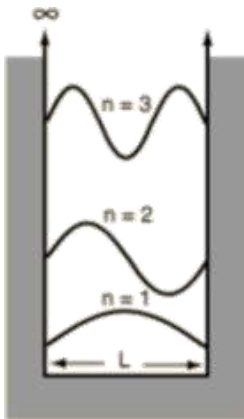


Slika 50. Elektromagnetski valovi

Primjer tih valova su vidljiva i ultraljubičasta svjetlost, radio i TV valovi, mikrovalovi, rendgenske ili x-zrake i radarski valovi.

Elektromagnetskim valovima ne treba materijalno sredstvo da bi postojali i prenosili energiju. U vakuumu svi imaju istu brzinu koja se naziva brzina svjetlosti: $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.

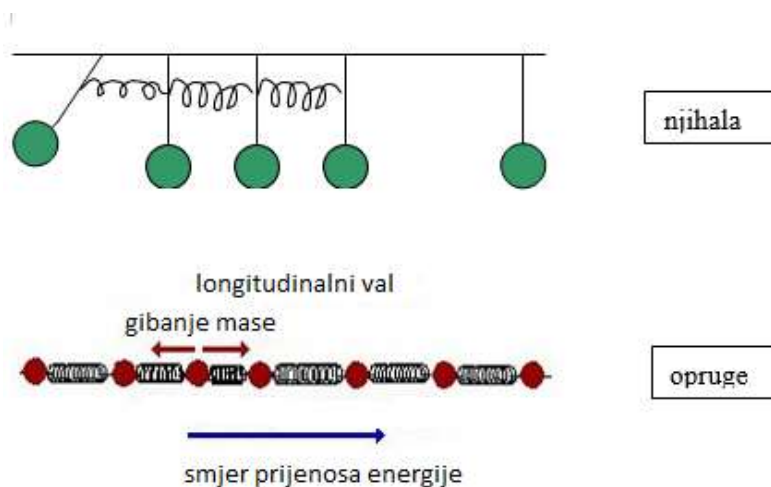
9.1.3. Valovi materije



To su valovi povezani s elementarnim česticama kao što su elektron ili foton ili s osnovnim česticama od kojih je izgrađen svijet tvari kao što su atomi ili molekule. Zamisao o valovima materije ujedinjuje dvije suprotstavljene zamisli u opisu materije. Slika 51 predstavlja model elektronskog vala zarobljenoga u atomu. Elektron je čestica koja ima masu i količinu gibanja, ali uz njega povezujemo val materije čiji kvadrat amplitude opisuje vjerojatnost da se elektron nađe na nekom mjestu unutar atoma.

Slika 51. Elektronski val zarobljen u atomu

9.1.4. Model vala



Slika 52. Model longitudinalnog vala

Njihanje ili titranje jednog oscilatora prenosi se na susjedni oscilator, s njega na sljedeći itd. Pojavu širenja pobude (poremećaja) u elastičnom sredstvu nazivamo elastični val. Slika 52 s nizom opruga prikazuje longitudinalni val gdje se poremećaj (zgušćaj ili razrjeđaj) čestica zbiva u smjeru širenja vala u sredstvu. Primjer takva vala je zvuk gdje se titranje neke površine prenosi na okolinu o obliku promjene tlaka.

Transverzalni val je pojava gdje je titranje izvora okomito na smjer širenja.



Slika 53. Transverzalni val

Kratka pobuda stvara puls, npr. u vodi ako se baci kamen.

9.1.5. Jednadžba harmonijskog vala

Pomak kod harmonijskog titranja opisan je funkcijom $y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi)$. Ako odaberemo da je $\varphi = 0$ rad, onda ta funkcija opisuje pomak oscilatora duž osi y čije se titranje širi kroz elastično sredstvo duž osi x . Ako je brzina prijenosa pobude stalna u cijelom sredstvu, onda se za vrijeme $t_k = x/v$ poremećaj proširi na udaljenost x . U trenutku t je na mjestu $x = 0$ m pomak y isti kao pomak na mjestu x u trenutku $t + x/v$. To možemo i zanemariti pa reći da je na mjestu x u trenutku t isti pomak y kao što je na mjestu $x = 0$ bio pomak nešto ranije, u trenutku $t - x/v$, tj.

$$\text{pomak: } y(t) = y_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right].$$

Valna duljina λ je duljina na koju se proširilo titranje u elastičnom sredstvu za vrijeme jednog perioda T , tj. vrijeme jednog titraja.

Brzina širenja vala v je omjer pomaka pobude i vremena, tj omjer valne duljine i perioda:

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

$$\lambda f = v$$

gdje je f frekvencija oscilatora. Valni broj k je omjer $k = \frac{\omega}{v}$ ili $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω je kružna brzina ili kružna frekvencija.

Valna jednadžba napisana s pomoću kružne frekvencije i valnog broja:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + -kx).$$

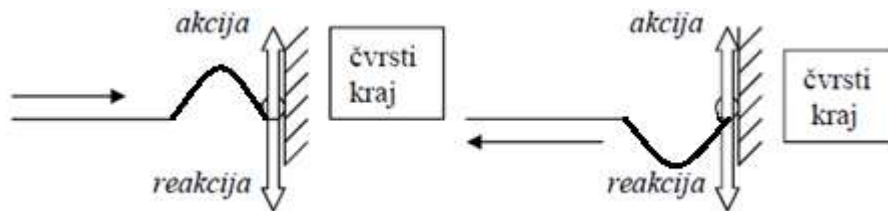
Ako je to jednadžba putujućeg ili progresivnog vala koji ide slijeva nadesno, onda će val zdesna nalijevo biti isti, osim što znak $-$ postaje $+$.

9.1.6. Interferencija valova

Interferencija valova je zbrajanje dvaju ili više koherentnih valova. Valovi su koherentni ako im se razlika faza ne mijenja u vremenu (konstanta), ako imaju identične valne duljine (ne može doći do interferencije, npr. zelene i crvene svjetlosti) i ako imaju identične amplitude.

9.1.7. Refleksija vala

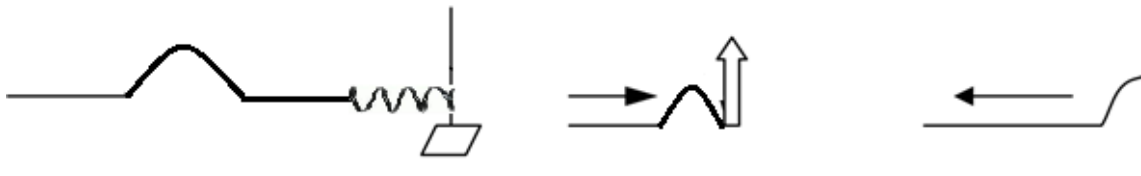
Pri refleksiji vala na čvrstom kraju val dobije pomak u fazi za π . Kada na zadnju česticu djeluje elastična sila prema gore, ta čestica djeluje na učvršćeni kraj silom prema gore (akcija), a učvršćeni kraj djeluje na česticu silom prema dolje (reakcija).



Slika 54. Refleksija vala na čvrstom kraju

Ako je $y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t - kx)$ jednadžba vala koji dolazi s lijeva nadesno prema čvrstom kraju, onda je jednadžba odbijenog vala $y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t + kx + \pi)$.

Pri refleksiji na pomičnom kraju reflektirani val vraća se bez promjene faze



Slika 55. Refleksija vala na pomičnom kraju

pa je jednadžba vala $y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t + kx)$.

Načelo superpozicije kaže da se pomaci pojedine čestice elastičnog sredstva zbrajaju kada se dva vala nađu na istom mjestu: $y = y_1 + y_2$.

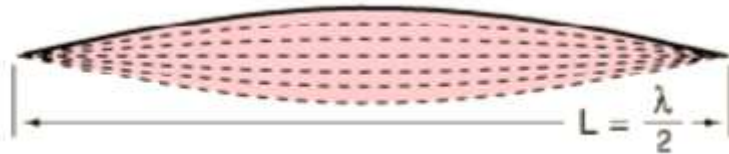
Načelo vrijedi kada je veza između pomaka i povratne sile linearna, npr. za povratnu silu opruge, ali ne vrijedi kada je ta veza nelinearna, npr. $F_{povratna} = -kx^2 - by^2$.

9.2. Stojni valovi

Ako se na napetoj struni upadni i reflektirani val zbrajaju prema načelu superpozicije (interferencija), može nastati niz pravilnih oblika žice koji se nazivaju stojni valovi. Naime, cijela žica titra istom frekvencijom (frekvencija izvora titranja), ali različite točke strune titraju

različitom amplitudom. One točke koje titraju najvećom amplitudom nazivaju se trbusi stojnog vala, a čvorovi su točke koje trajno miruju.

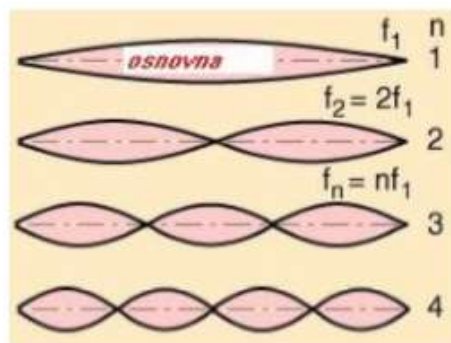
Ako je dužina strune učvršćene na oba kraja L , onda se na njoj mogu formirati stojni valovi čija je valna duljina $\lambda_n = \frac{2L}{n}; n=1,2,3,\dots$. Za $n = 1$ nastaje osnovni (fundamentalni) val ili prvi harmonik valne duljine $\lambda_{max} = 2L$.



Slika 56. Stojni val gdje je L pola valne duljine

Taj se val formira ako je frekvencija izvora $f_{min} = \frac{v}{\lambda_{max}} = \frac{v}{2L}$, gdje je v brzina vala.

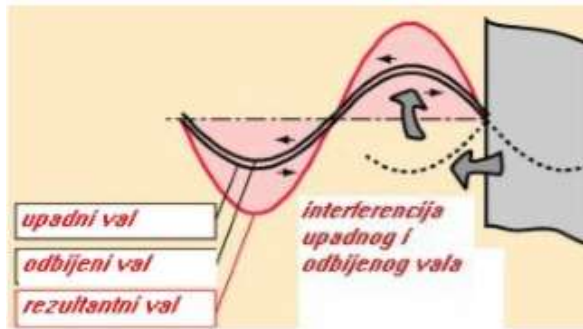
Ako izvor titra i s višim frekvencijama koji su višekratnici osnovne frekvencije, nastaju viši harmonici. Ako osnovnu, najnižu frekvenciju umjesto f_{min} označimo s f_1 , onda će frekvencije viših harmonika biti $2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$ i te stojne valove nazivamo drugi, treći, četvrti harmonik čiji je oblik:



Slika 57. Prikaz harmonika

9.2.1. Izvod formule za stojni val

Ako je upadni val $y_1 = y_m \cos(\omega t - kx)$, a reflektirani $y_2 = y_m \cos(\omega t + kx + \pi)$, tamo gdje se valovi susreću nastaje rezultatni val čiji je pomak $y = y_1 + y_2$:



Slika 58. Upadni i odbijeni val

Primjenjujući trigonometrijsko pravilo o zbrajanju kosinusa dvaju kutova,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ dobije se rezultat } y = 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t).$$

Primjenom rubnog uvjeta (na kraju strune je $x = L$) $\sin(kL) = 0$. Sinusna funkcija je nula kad je kut nula ili $n\pi$, pa slijedi da je $kL = n\pi$ ili (jer je $k = 2\pi/\lambda$): $\lambda = \frac{2L}{n}$. Na ovaj način pojavila

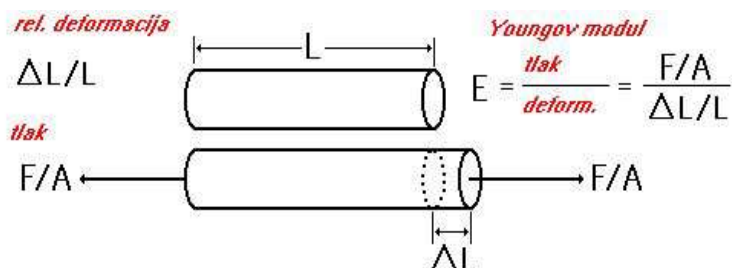
se kvantizacija energije u klasičnoj fizici. Stojni valovi se neće pojaviti na ograđenoj struni za bilo koje frekvencije izvora, već za točno određene (osnovna frekvencija i viši harmonici). Svakoj frekvenciji odgovara neka energija, tako da se može reći da struna titra ne s bilo kojom energijom, nego s nekim energijama koje su višekratnici osnovnog kvanta energije koji odgovara titranju s osnovnom frekvencijom. Pri tom je amplituda pri titranju s osnovnom frekvencijom najveća, a kod viših harmonika se smanjuje. Brzina valova u struni je $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$,

F je napetost žice (strune), μ je masa jedinične duljine žice $\mu = \frac{m}{L}$, m je masa, a L je duljina

žice. Brzina valova u masivnom čvrstom sredstvu (čelični štap) jest $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E je Youngov

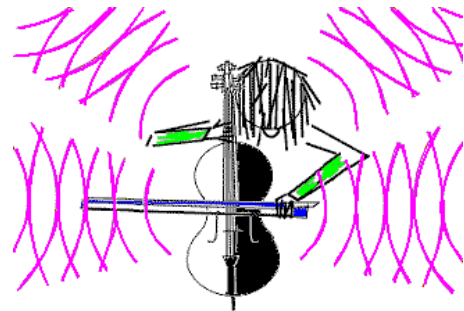
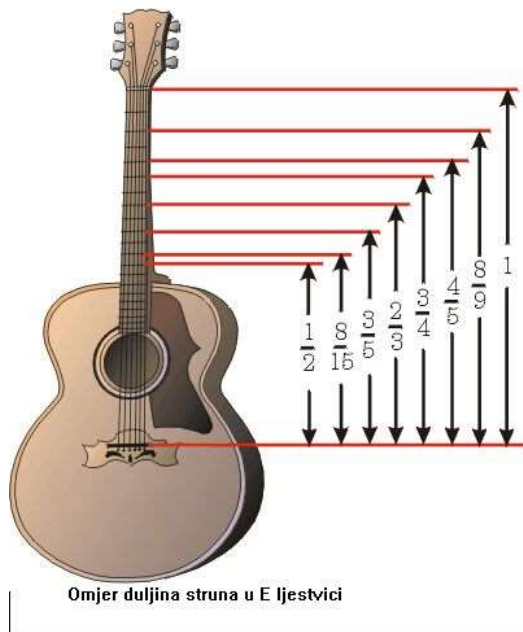
modul elastičnosti, fizikalna veličina koja opisuje koliko se izduljena elastična tijela skraćuju ili produljuju pod djelovanjem sile ovisno o materijalu od kojega su načinjena,

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_0}} = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta L}{L_0}}, \text{ gdje je } \Delta L \text{ promjena duljine, a } L_0 \text{ početna duljina.}$$



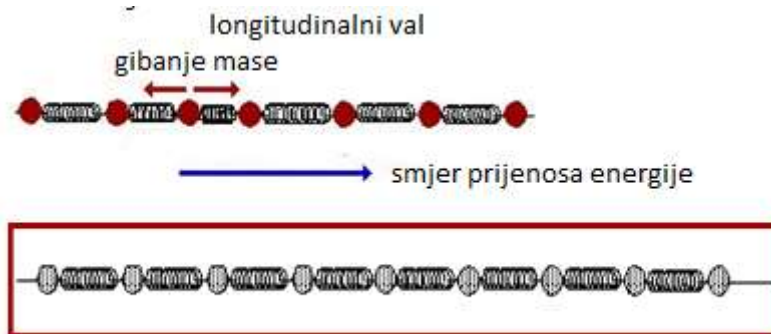
Slika 59. Youngov modul elastičnosti

9.3. Zvuk



Slika 60. Gitara proizvodi tonove

Zvuk je elastični val koji nastaje titranjem izvora (tijela). Zvuk klavira nastaje titranjem žice. Poremećaj se širi u elastičnom sredstvu kao longitudinalni val čija je frekvencija jednaka frekvenciji izvora.



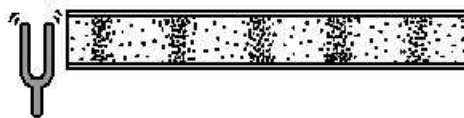
Slika 61. Zvuk je longitudinalni val

Ljudsko uho čuje frekvencije od 20 Hz do 20 000 Hz. Zvuk frekvencije manje od 20 Hz je infrazvuk, a veće od 20 000 Hz je ultrazvuk.

Primjer 9.1. Kako opisati zvuk u zraku?

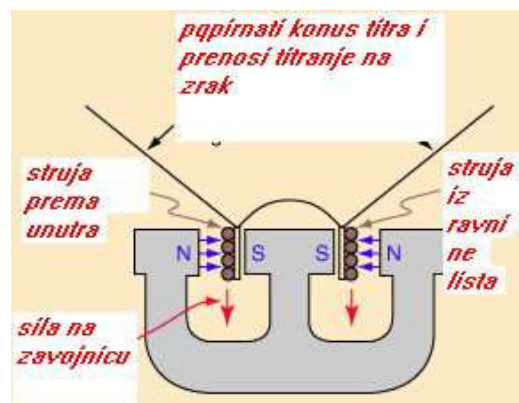
Razmotrimo dugi hodnik s vratima na jednom kraju i otvorenim prozorom i zavjesom na drugom kraju. Otvaranjem vrata prema unutra nastaje zgušnjenje molekula zraka koje se prenosi na susjedne molekule dok ne dođe do prozora i pomakne zavjesu prema van. Kada zatvorimo vrata, nastaje razrjeđenje, u njega dolaze molekule zraka iz okoline i tako se razrjeđenje prenosi prema zavjesi koja zaleprša prema unutra. Stalnim otvaranjem i zatvaranjem vrata nastaje val koji natjera zavjesu lepršati amo-tamo.

Primjer 9.2. Kako titra glazbena viljuška?



Slika 62. Titranje viljuške

Glazbena viljuška titra slično titranju vrata, samo što su amplitude pri titranju znatno manje, a frekvencija titranja znatno veća (nekoliko stotina herca). Titranje glazbene viljuške prenosi se u okolni zrak u obliku zgušnjenja i razrjeđenja zraka. Na sličan se način titranje papirnato konusa u zvučniku prenosi na okolni zrak.



Slika 63. Titranje papirnato konusa

9.3.1. Brzina zvuka u fluidu

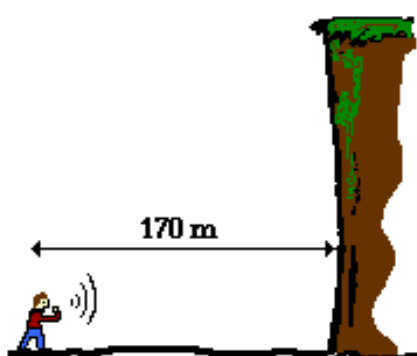
Brzina zvuka se određuje prema formuli $v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$, gdje je $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ adijabatska konstanta, a c_p

i c_v su toplinski kapaciteti fluida pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu, p je tlak fluida, a ρ je gustoća fluida.

Iznos brzine mijenja se s temperaturom t prema izrazu: $v = 332 \text{ ms}^{-1} + 0,62t$.

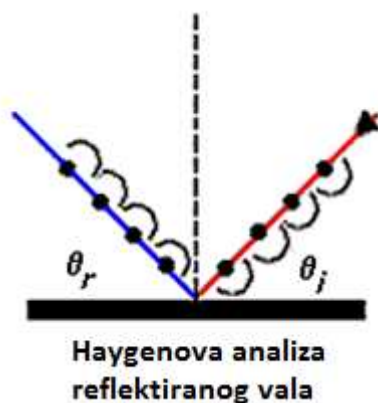
U vodi je brzina zvuka četiri puta veća nego u zraku, a u čeliku 15 puta veća. Zvuk pokazuje valne pojave refleksije (jeka) i refrakcije ili loma (brzina se širenja mijenja s gustoćom elastičnog sredstva).

9.3.2. Valne pojave povezane sa zvukom



Slika 64. Refleksija zvuka

Refleksija zvuka naziva se jeka, reverberacija je višestruko odbijanje, a lom ili refrakcija zvuka nastaje pri prijelazu u sredstvo različite gustoće. Refleksija može biti potpuna ili djelomična (tada dio energije vala prelazi u drugo sredstvo). Odnos refleksije i transmisije ovisi o svojstvima sredstva, a izražava se karakterističnom impedancijom sredstva i označava slovom z .



Slika 65. Reflektiranje valova

9.3.3. Promjena impedancije na diskontinuitetu gustoće

Akustična impedancija z ovisi o brzini vala v i gustoći sredstva ρ , S je presjek svirale:

$$z = \frac{v\rho}{S}.$$

Ako val amplitude A_I u sredstvu 1 dođe na granicu sa sredstvom 2, amplitude reflektiranog i transmitiranog vala dane su izrazima:

$$A_t = \frac{2}{z_1/z_2 + 1} A_I$$

$$A_r = \frac{z_1/z_2 - 1}{z_1/z_2 + 1} A_I.$$

Brzina zvuka u fluidu opada s povećanjem gustoće (slično kao kod vala na struni) pa će animacija za transversalni val na struni biti primjenjiva i na zvuk. Dvije su strune povezane pa imaju istu napetost (kod zvuka bi to bili mediji istog tlaka), a gustoća deblje četiri je puta veća nego tanje. Kako se odnose brzine u tim sredstvima?



Slika 66. Brzine vala u sredstvima različite gustoće

9.3.4. Zvuk kao varijacija tlaka oko neke srednje vrijednosti

Zvuk u zraku je posljedica varijacije tlaka Δp oko neke srednje vrijednosti. Povećanje tlaka (zgušnj enje) širi se kroz sredstvo, slijedi smanjenje tlaka (razrjeđenje). Pri tome se pomiču i molekule zraka.

Za zvučni val frekvencije $f = 1000 \text{ Hz}$ (na koju je ljudsko uho najosjetljivije) pomak molekula na pragu čujnosti je $\psi \approx 10^{-11} \text{ m}$, a raspon promjene tlaka $\Delta p_{\max} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$. Na pragu bola pomak molekula je $\psi \approx 10^{-5} \text{ m}$, a promjena tlaka $\Delta p_{\max} = 30 \text{ Pa}$.

Intenzitet zvuka raste s kvadratom varijacije tlaka: $I \approx \Delta p_{\max}^2$.

9.3.5. Razine jakosti zvuka u decibelima (dB)

Pragu čujnosti odgovara intenzitet zvuka od $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Pragu boli odgovara intenzitet zvuka od $I_0 = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Razina buke se definira: $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (decibela).

Na pragu čujnosti razina buke iznosi 0 dB, a na pragu bola 120 dB.

9.3.6. Opadanje intenziteta

Umjesto da se val zvuka opisuje gibanjem čestica u nekom sredstvu pa onda jednadžba vala opisuje pomak čestice naprijed-nazad na nekom mjestu sredstva x u nekom trenutku t , zvuk se može opisati promjenom tlaka oko neke srednje vrijednosti (npr. atmosferskog tlaka p_0) pa jednadžba vala ima oblik:

$$y(x, t) = y_m \cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \cos(\omega t - kx).$$

Za zvuk frekvencije $f = 1000$ Hz (na koji je ljudsko uho najosjetljivije) pomak molekula na pragu čujnosti iznosi oko 10^{-11} m, što odgovara promjeni tlaka $\Delta p_{\max} = 10^{-5}$ Pa. Na pragu bola najveći je pomak oko 30 Pa, što odgovara maksimalnoj promjeni tlaka $p_{\max} = 30$ Pa.

Primjer 9.3. Napišite jednadžbu za varijaciju zvučnog vala oko srednje vrijednosti frekvencije 256 Hz (srednji C u glazbenoj ljestvici) pri temperaturi od 20 °C ako je amplituda promjene tlaka $\Delta p_{\max} = 5 \cdot 10^{-1}$ Pa.

Rješenje:

Iz osnovne formule koja povezuje brzinu, valnu duljinu i frekvenciju vala izračuna se valna duljina, a onda valni broj:

$$v = 332 \text{ ms}^{-1} + 0,62 \cdot t = (332 \text{ ms}^{-1} + 0,62 \cdot 20) \text{ ms}^{-1} = 344 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344 \text{ ms}^{-1}}{256 \text{ s}^{-1}} = 1,35 \text{ m} \text{ pa je valni broj } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,35 \text{ m}} = 4,65 \text{ m}^{-1}, \text{ tada je}$$

$$\Delta p(x, t) = 5 \cdot 10^{-1} \text{ Pa}_m \sin(2\pi 256 \text{ s}^{-1} \cdot t - 4,65 \cdot \text{m}^{-1} \cdot x).$$

9.3.7. Intenzitet (jakost) zvuka

Energija zvučnih valova je vrlo mala, npr. energija koju stvara 10 milijuna ljudi u razgovoru odgovara energiji uobičajene baterijske svjetiljke.

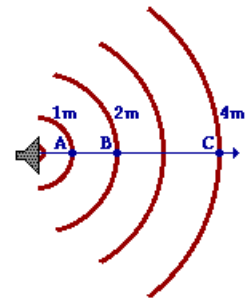
Intenzitet vala na nekoj površini je srednji iznos energije u jedinici vremena koja prođe kroz tu površinu pa ako s I označimo intenzitet ili jakost vala, s E energiju, s P snagom, a s A površinu,

$$\text{onda je: } I = \frac{E}{t \cdot A} = \frac{P}{A} \left[\frac{W}{m^2} \right].$$

Intenzitet je povezan s maksimalnim iznosom pomaka molekula y_{\max} izrazom:

$$I = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega^2 \cdot y_{\max}^2.$$

Intenzitet vala opada s udaljenošću. Ako zamislimo izvor zvuka u središtu kružnice, onda sva energija mora proći kroz površinu kružnice radijusa r_1 pa je $I_1 = \frac{P}{4\pi \cdot r_1^2}$.



Onda će na nekoj većoj udaljenosti r_2 intenzitet I_2 biti $I_2 = \frac{P}{4\pi \cdot r_2^2}$

pa je omjer intenziteta $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$.

Slika 67. Intenzitet zvuka opada s udaljenošću

9.3.8. Jakost u decibelima (dB)

Amplituda pomaka koja djeluje na ljudsko uho ima raspon od 10^{-11} m (granica slušnosti) do 10^{-5} m (granica bola), što je omjer od 10^6 . Kako intenzitet raste s kvadratom amplitude pomaka, onda je omjer intenziteta na te dvije granice ljudskog slušnog sustava 10^{12} . Da bi se lakše iskazao takav velik raspon intenziteta, koristimo se logaritmom $y = \log x$, tada množenje x s 10 povećava y za 1.

10. Elektricitet i magnetizam

10.1. Elektricitet

Električni naboji su sastavni dijelovi atoma. Svaki atom kao cjelina sastoji se od elektrona, protona i neutrona. Mase i naboj svake od tih čestica prikazani su na slici 68. Atomi gotovo uvijek imaju jednak broj protona i elektrona. U tom slučaju kažemo da je atom neutralan, a ako je broj protona i elektrona različit, kažemo da je atom ioniziran.

masa (kg)	naboj (C)
elektron	
$9,109 \times 10^{-31}$	$-1,602 \times 10^{-19}$
proton	
$1,673 \times 10^{-27}$	$+1,602 \times 10^{-19}$
neutron	
$1,675 \times 10^{-27}$	0

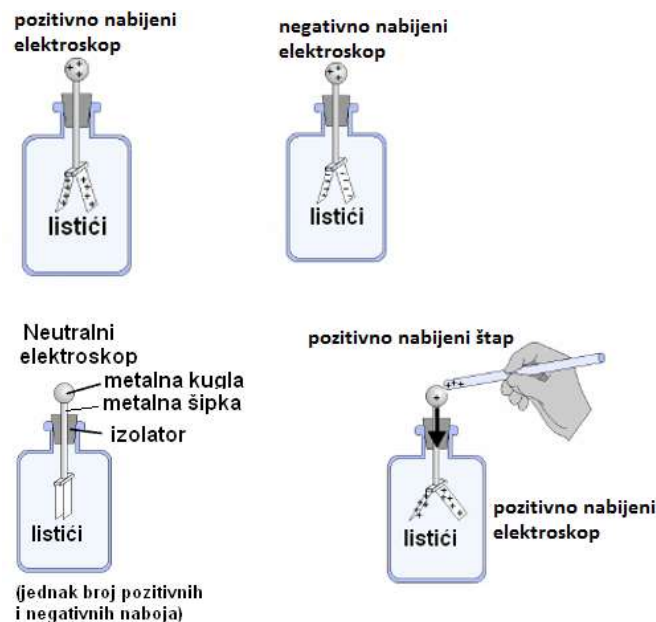
Slika 68. Masa i naboj protona, neutrona i elektrona

Neko tijelo možemo naelektrizirati ako tijelu smanjimo ili povećamo broj elektrona. Naboji elektrona ili protona su elementarni naboji. Jedinica za električni naboj je kulon (C). Ukupna količina naboja na nekom tijelu može se prikazati izrazom $Q = N \cdot e$, gdje je N prirodni broj, a e elementarni naboj koji iznosi $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$. Naboj može biti pozitivan ili negativan. Dakle, elektroni i protoni imaju elementarni naboj. Tu se prvi put susrećemo s kvantizacijom naboja.

Neka se tijela mogu elektrizirati trljanjem, a neka ne mogu. Tijela koja se mogu elektrizirati međusobno se ili privlače ili odbijaju. Elektrizirana tijela privlače i druga lagana tijela koja nisu elektrizirana. Električni naboj može i dodirrom prelaziti s jednog tijela na drugo. Elektroskop je sprava za određivanje elektriziranosti tijela (slika 69). Kada se na pločice elektroskopa dovede pozitivan ili negativni naboj, pločice će ostati razdvojene.

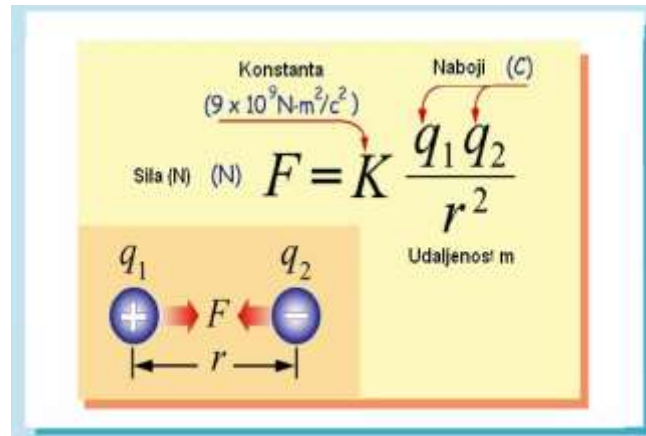


Slika 69. Elektroskop



Slika 70 .Pozitivno i negativno nabijeni elektroskop i štap te neutralni elektroskop

Coulombov zakon je relacija kojom opisujemo međudjelovanje dvaju naboja koji se nalaze na nekoj udaljenosti.



Slika 71. Coulombov zakon

Iznos sile F između dvaju električki nabijenih tijela proporcionalan je umnošku naboja q_1 i q_2 , a obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti između njih:

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} (\vec{r}_0)_{12}.$$

Sila \mathbf{F} je vektorska veličina, a smjer sile ovisi o predznaku naboja q_1 i q_2 . Ako su naboji istog predznaka, sila je odbojna, a ako su naboji različitog naboja, sila je privlačna (slika 71). Konstanta K u vakuumu iznosi $9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, dok je u dielektriku K jednak:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}.$$

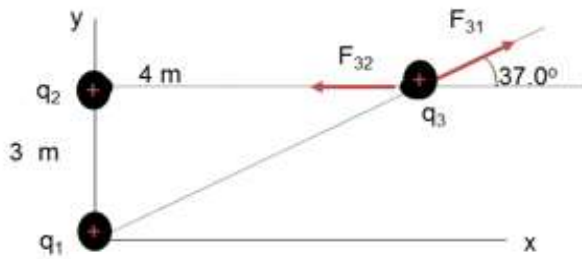
Permitivnost vakuumu je $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

Kažemo da u nekoj točki postoji električno polje ako sila električnog porijekla djeluje na elektrizirano tijelo u toj točki.

Primjer 10.1.

Razmotrimo slučaj triju točkastih naboja smještenih u vrhovima trokuta, kao što je prikazano na slici dolje. Izračunajte ukupnu silu na q_3 ako su zadani naboji: $q_1 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ i $q_3 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Rješenje:

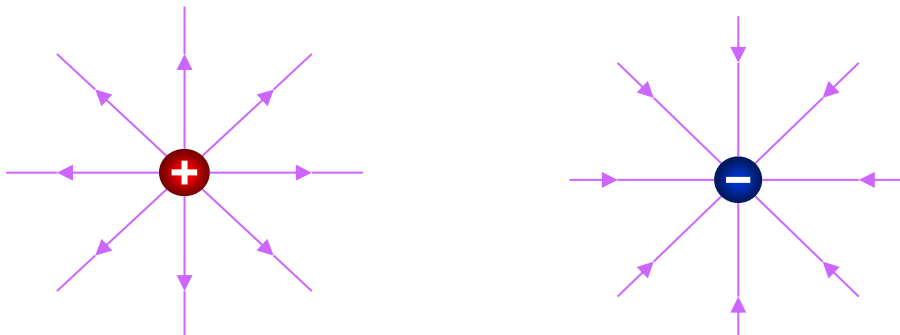


Superpozicija je princip koji nam kaže da je rezultantna sila na naboj q_3 zbroj sila F_{32} i F_{31} . Iznose sila F_{32} i F_{31} izračunavamo koristeći se Coulombovim zakonom.

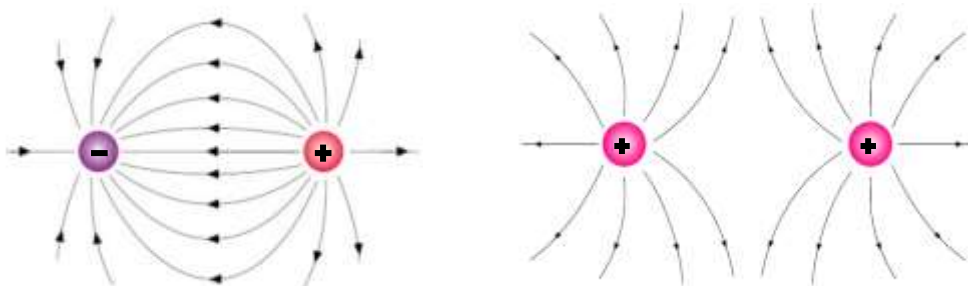
Jakost električnog polja jednaka je sili na jedinični pozitivni naboj $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, dok je sila na jedinični negativni naboj istog iznosa, ali suprotnog smjera od sile na jedinični pozitivni naboj.

Mjerna jedinica za električno polje je njutn/kulon ($\frac{N}{C}$).

Silnice električnog polja kod pozitivnog i negativnog naboja (slika 72).



Slika 72. Silnice kod negativno i pozitivno nabijenog naboja

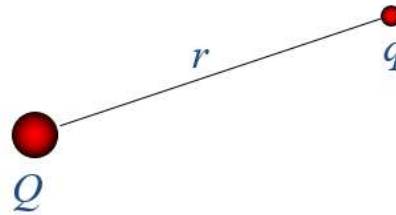


Slika 73. Silnice električnog polja dipola

Iznos električnog polja koje točkasti naboj q stvara u točki Q na udaljenosti r iznosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Qq}{r^2}$$

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Qq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$$



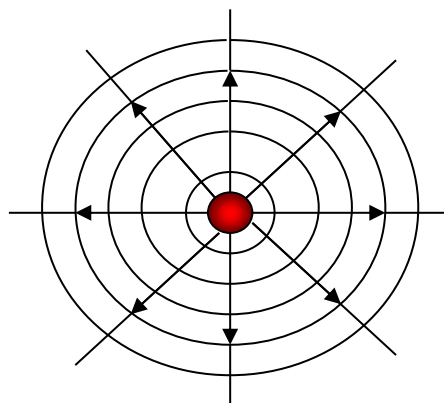
Električni potencijal

Električni potencijal (φ) fizikalna je veličina kojom opisujemo svojstvo polja u točno određenoj točki prostora u kojemu se to električno polje rasprostire: $\varphi = \frac{E_{ep}}{q}$, E_{ep} je električna potencijalna energija. Mjerna jedinica za električni potencijal je volt (V).

Ekvipotencijalne plohe u električnom polju su plohe koje imaju jednak potencijal u svakom svom dijelu.

Električna potencijalna energija što je jedan u odnosu na drugoga imaju točkasti naboji Q i q kada su na međusobnoj udaljenosti r jednaka je: $E_{ep} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{r^2}$.

Električni potencijal na udaljenosti r od točkastog naboja Q : $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$.

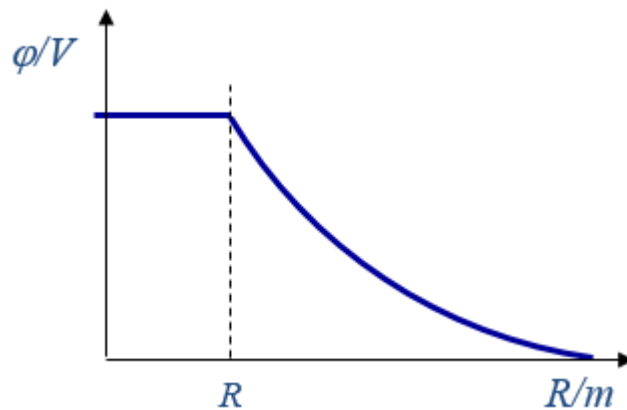


Slika 74. Ekvipotencijalne plohe točkastog naboja

Električni potencijal izvan nabijene metalne kugle na udaljenosti r od njezina središta:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}.$$

Električni potencijal nabijene metalne kugle polumjera R : $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R}$.



Slika 75. Električni potencijal nabijene metalne kugle polumjera R

Električna struja je gibanje naboja u vodiču u kojem djeluje stalno električno polje. Vodič je materijal u kojem postoje slobodni naboji, naboji koji se pod utjecajem električnog polja mogu gibati. Mnoge otopine također provode električnu struju, ali mi ćemo se koristiti vodičima koji su uglavnom metalni vodiči i njihovim legurama. U tim vodičima slobodni naboji su elektroni. Ako polje koje djeluje ne mijenja smjer, tada se i smjer protjecanja naboja ne mijenja pa tu govorimo o istosmjernoj struji. Međutim, ako polje mijenja smjer u određenim razmacima, tada govorimo o izmjeničnoj struji.

Jakost električne struje jednaka je količini naboja koja prijeđe presjekom vodiča u jedinici vremena: $I = \frac{Q}{t}$. Mjerna jedinica je amper = kulon / sekunda ($A = C / s$).

Q je količina naboja koja je za vrijeme t prošla kroz poprečni presjek vodiča S .

$Q = neSv \cdot t$, gdje je n gustoća slobodnih elektrona. Broj elektrona koji u vremenu Δt prijeđu vertikalnim presjekom žice površine S jednak je broju slobodnih elektrona u volumenu valjka $Sv \Delta t$, pa slijedi $I = neSv$.

Primjer 10.2. Srebrnim vodičem površine presjeka $2,5 \text{ mm}^2$ teče stalna struja jakosti 5 A . Izračunajmo:

- broj elektrona koji svake sekunde prođe površinom presjeka vodiča,
- srednju brzinu usmjerenog gibanja slobodnih elektrona ako je njihova gustoća u srebru $5,8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Rješenje:

$$S = 2,5 \text{ mm}^2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$n = 5,8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

a) $N = ?$

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{Ne}{t}$$

$$N = \frac{It}{e}$$

$$N = 3,125 \cdot 10^{-19}$$

b)

$$\bar{v} = ?$$

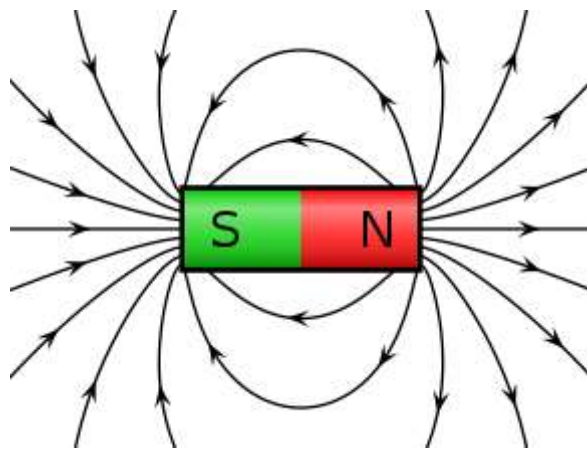
$$I = enS\bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{I}{enS}$$

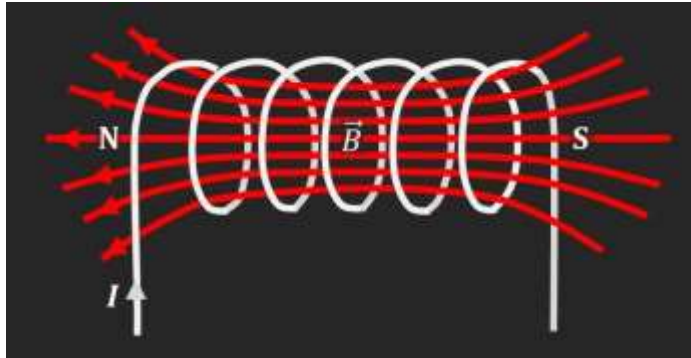
$$\bar{v} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

10.2. Magnetsko polje

Magnetsko polje je prostor oko prirodnih i umjetnih magneta i unutar njih u kojem djeluju magnetske sile. Magnetsko polje postoji također u prostoru oko toka električne struje, pa se najčešće obrađuje kao elektromagnetsko polje. Općenito, magnetsko polje slično je električnom polju s obzirom na matematičku obradu, ali je bitna razlika u tome što ne postoje slobodni magnetski naboji kao što postoje slobodni elektroni. Magnetsko polje nastaje oko niza električnih naboja u gibanju, to jest oko električnog vodiča kojim teče električna struja. Magnetsko polje stvaraju električni naboji čestica u gibanju.



Slika 76. Magnetsko polje prirodnog magneta opisano je magnetskim silnicama kako je prikazano na slici.



Slika 77. Magnetsko polje zavojnice kroz koju teče struja opisano je magnetskim silnicama kako je prikazano na slici.

Jednostavnije rečeno, električni naboji, osim što djeluju elektrostatičkim silama (Coulombov zakon), djeluju i magnetskim silama. Poznato je da između dvaju ravnih vodiča kojima teče struja postoji privlačenje ili odbijanje. Ako struja teče u istom smjeru, tada se vodiči privlače, a ako struja teče u različitim smjerovima, tada se vodiči odbijaju.

Vektor magnetske indukcije \mathbf{B} fizikalna je veličina koja opisuje magnetsko polje. Na naboj u polju magnetske indukcije \mathbf{B} djeluje sila \mathbf{F} koju nazivamo Lorentzova sila. Lorentzova sila ovisi o veličini naboja Q koji se giba brzinom \mathbf{v} u magnetskom polju \mathbf{B} , ali ovisi i o sili koja na naboj djeluje zbog električnog polja \mathbf{E} .

Iznos i smjer Lorentzove sile jednak je zbroju magnetske i električne sile na naboj. Ponekad se samo doprinos magnetske sile naziva Lorentzova sila.

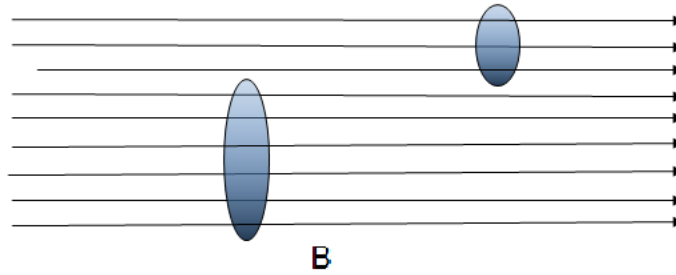
$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

Vektori \mathbf{B} , \mathbf{v} i \mathbf{F} su međusobno okomiti pa ako poznajemo smjer gibanja i smjer magnetske indukcije, pravilom desne ruke jednostavno ćemo odrediti i smjer sile \mathbf{F} . Ako se otvoreni dlan postavi tako da silnice magnetskog polja izlaze iz dlana, a ispruženi prsti u smjeru gibanja naboja \mathbf{v} , tada će magnetska sila \mathbf{F} djelovati u smjeru ispruženog palca.

Magnetski tok (Φ) važan je za razumijevanje magnetske indukcije. Magnetski tok (Φ) fizikalna je veličina i on je mjera broja silnica magnetskog polja koje prolaze kroz neku površinu S .

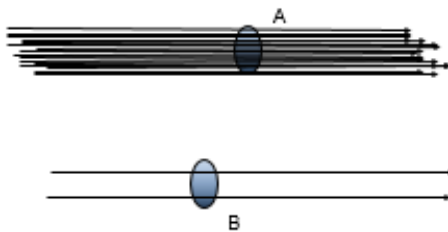
$$\text{Iznos magnetskog toka: } \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Jedinica magnetskog toka je veber (W). Magnetska indukcija zapravo je gustoća magnetskog toka. Njezina mjerna jedinica je veber/m² = tesla (W/m² = T).



Slika 78. Stalno magnetsko polje ima stalnu gustoću silnica kroz neku površinu

Primjer 10.3.



Na crtežu slijeva, kroz površinu A magnetski tok je veći od magnetskog toka kroz površinu B. Magnetski tok kroz područje A veći je od magnetskog toka kroz područje B zbog gustoće silnica polja.

Kada se vodič nalazi u magnetskom polju i ako njime teče struja, tada na njega djeluju magnetske sile. Sila na ravni vodič duljine l kojim teče stalna struja I jednaka je $\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})$.

U nekoj točki A na udaljenosti r od dugog ravnog vodiča iznos magnetske indukcije jednak je

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}.$$

Ako imamo dva duga ravna vodiča čija je međusobna udaljenost r , vodičima teče struja iznosa I_1 i I_2 . Svaki vodič nalazi se u magnetskom polju (čije su silnice koncentrične kružnice oko vodiča, smjer tih silnica u skladu je s pravilom desne ruke) drugog vodiča i tako djeluju jedan na drugoga silom F .

Iznos sile je tada jednak:
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r}.$$

Promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje i električnu struju, a tu pojavu nazivamo elektromagnetska indukcija. Elektromagnetska indukcija je pojava da se u vodiču vodljive žice stvori električni napon U ako se vodič nalazi u promjenjivom magnetskom toku Φ .

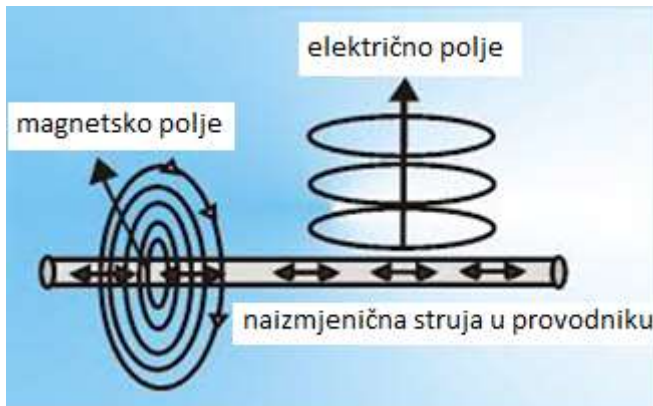
Time je utvrđeno da se i električne pojave javljaju kao posljedica magnetskih. Pri svakoj promjeni magnetskog polja u vodiču se inducira napon U . To je fizikalna veličina koja je jednaka razlici potencijala između točaka polja: $U = \frac{W}{Q}$. Definira se kao kvocijent rada i naboja

koji se pomiče između tih točaka električnog polja, mjerna jedinica je volt (V). Ako se u vodiču inducira napon, nastat će i inducirana struja.

Napon induciran na krajevima zavojnice proporcionalan je broju navoja N i brzini promjene magnetskog toka:

$$U_i = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

10.3 Elektromagnetsko zračenje



Slika 79. Elektromagnetsko zračenje

Elektromagnetsko zračenje je kombinacija titrajućeg električnog i magnetskog polja koja zajedno putuju kroz prostor u obliku međusobno okomitih valova. Ono je nosilac elektromagnetske interakcije (sile), a može se interpretirati kao val ili kao čestica, ovisno o slučaju. Čestice koje određuju elektromagnetsko zračenje su fotoni.

Elektromagnetske valove teorijski je predvidio James Maxwell pokušavajući objasniti efekte indukcije električne struje u magnetskim poljima i obrnuto. Poslije je Heinrich Rudolf Hertz potvrdio tu teoriju generirajući radiovalove koje je detektirao s drugog kraja svojeg laboratorija jednostavnim titranjem električne struje kroz vodič.

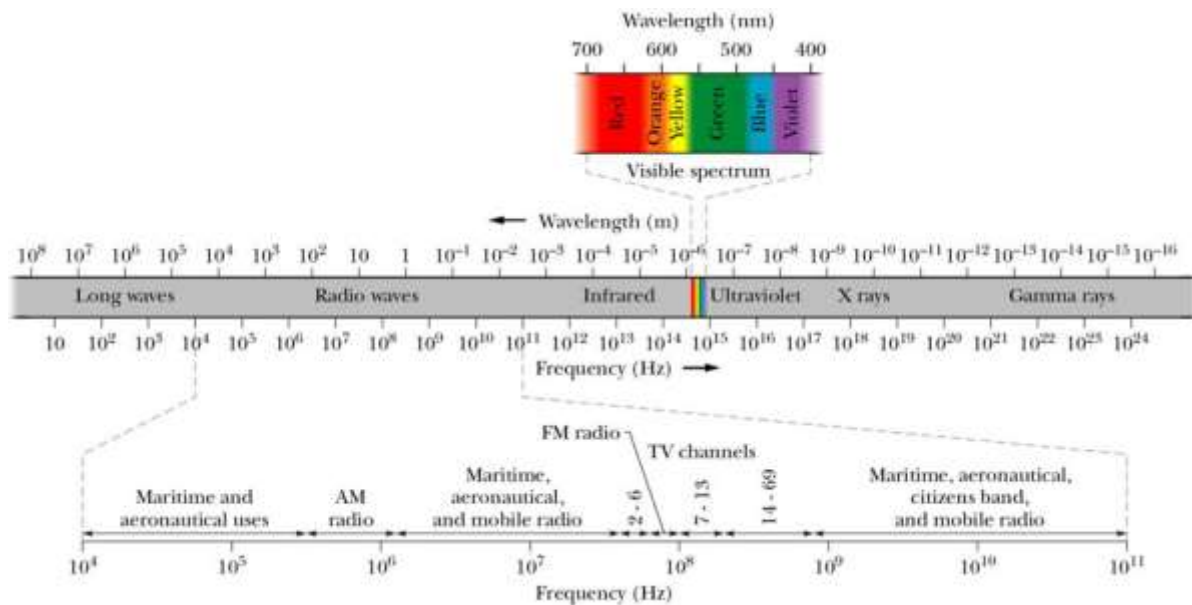
Svaki naboj promjenom brzine gibanja generira elektromagnetsko polje.

Ta se informacija širi kroz prostor brzinom svjetlosti, a osobine odgovarajućeg elektromagnetskog vala direktno su vezane za dinamiku promjene gibanja električnog naboja. Ako postoji vodič u kojem naboj titra, generirani elektromagnetski val imat će istu frekvenciju titranja naboja. Alternativno, ako se na elektromagnetsko zračenje gleda kao na emisiju čestica (fotona), energija koju one nose direktno je vezana za valnu dužinu, odnosno frekvenciju vala. Što je veća frekvencija, to je veća energija fotona. Točan odnos opisan je Planckovom relacijom $E = h\nu$, gdje je E energija fotona, h je Planckova konstanta, a ν je frekvencija vala. Često se navedeni izraz može napisati u obliku $E = h \frac{c}{\lambda}$, c je brzina zračenja, a λ valna duljina zračenja.

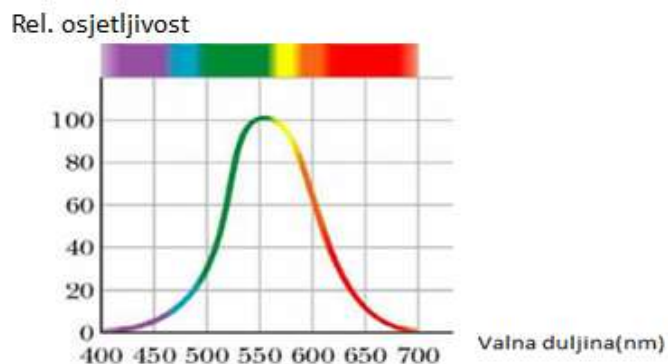
Kao što električna struja promjenjive vrijednosti u vodiču može proizvesti elektromagnetski val, isto tako elektromagnetski val u nekom vodiču također može inducirati električnu struju iste frekvencije i na taj način omogućiti transfer informacije od mjesta emitiranja ka prijemniku, što je osnova svih bežičnih komunikacija.

10.4. Spektar elektromagnetskih valova

Svojstva elektromagnetskih valova ovise o njihovoj valnoj dužini λ i kao takvi se dijele na električne, radio- i mikrovalove, zatim na infracrvenu, vidljivu i ultraljubičastu svjetlost, X-zrake i gama-zrake. Cijeli opseg valnih dužina elektromagnetskog zračenja zove se elektromagnetski spektar.



Slika 80. Elektromagnetski spektar zračenja



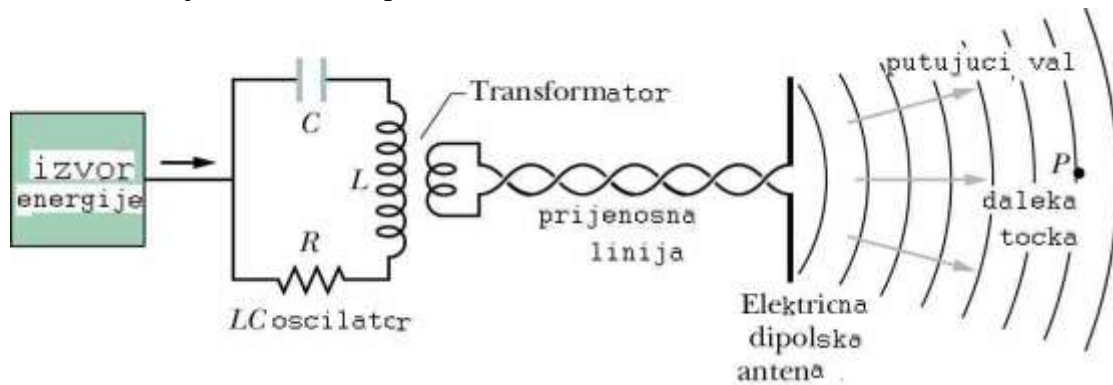
Slika 81. Vidljiva svjetlost

Na gornjoj ljestvici svaka oznaka predstavlja promjenu valne duljine ili frekvencije za faktor 10.

Ljudsko oko je osjetljivo na mali dio elektromagnetskog spektra. Slika 81 prikazuje relativnu osjetljivost oka na svjetlost različitih valnih duljina. Oko je najosjetljivije na valnu duljinu 550 nm, koju nazivamo žuto-zelena. Približno je 100 puta manje osjetljivo na valne duljine od 400 nm ili 700 nm, što smatramo granicom vidljivosti.

10.5. Putujući elektromagnetski val

Elektromagnetski valovi (svjetlost, X-zrake, gama-zrake) čija je frekvencija jednaka ili veća od frekvencije vidljive svjetlosti nastaju zračenjem iz izvora veličine atoma ili jezgre atoma. To je područje mikrosvijeta u kojem vrijede zakoni kvantne fizike. Valovi manje frekvencije (valne duljine približno 1 m), kao što su mikrovalovi u mobitelima, nastaju u izvorima makroskopske veličine, kao što je LC oscilator prikazan na slici 82.



Slika 82. LC oscilator

Izvor, osim LC oscilatora, čini izvor energije (generator izmjeničnog napona), transformator, prijenosna linija i antena. Dosta daleko od antene detektor bi registrirao ravni, putujući elektromagnetski val koji ima električnu i magnetsku komponentu:

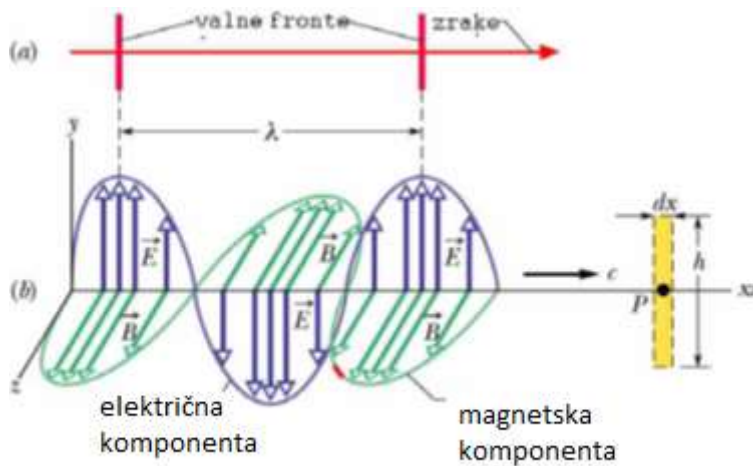
$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B &= B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

gdje su E_0 i B_0 amplitude jakosti polja (električnog i magnetskog), a ω i k su kutna frekvencija i valni broj elektromagnetskog vala. Brzina vala je blizu $3 \cdot 10^8$ m/s, a može se pokazati da je u vezi s dvjema konstantama koje opisuju električna i magnetska svojstva materije, tj. ϵ_0 i μ_0 .

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

10.6. Prikaz elektromagnetskog vala

Val se može prikazati s pomoću zrake koja pokazuje smjer putovanja vala ili s pomoću valnih fronta koje su zamišljene plohe na kojima val ima isti iznos jakosti električnog polja.



U prikazu na slici 83 strelice različite duljine na različitim točkama duž osi x prikazuju kolika je vrijednost (iznos) polja na tom mjestu na osi x . Sinusoida je ovojnica koja prikazuje iznose polja na različitim mjestima osi x u jednom trenutku.

Slika 83. Vrijednosti električnog i magnetskog polja

11. Svjetlost (optika)



Škotski fizičar J. C. Maxwell pokazao je da je optika znanost o svjetlosti, odnosno da je svjetlost elektromagnetski val (putujući val električnog i magnetskog polja).

Optika, u širem smislu, dio je fizike koji proučava elektromagnetske valove (njihova svojstva i pojave). Elektromagnetski valovi (ili elektromagnetsko zračenje) predstavljaju najzastupljeniju skupinu valova u prirodi (radiovalovi, mikrovalovi, toplinsko i ultraljubičasto zračenje, X-zrake).

Optika, u užem smislu, proučava onaj dio elektromagnetskog zračenja koji djeluje na mrežnicu ljudskog oka stvarajući osjet vida. Taj dio elektromagnetskog zračenja nazivamo svjetlošću, koji predstavlja uski interval valnih duljina od 380 do 780 nm.

Slika 84. J. C. Maxwell

11.1. Geometrijska optika



Slika 85. Primjer zrcaljenja

Područje fizike u kojemu se širenje svjetlosti opisuje pojednostavljeno s pomoću svjetlosnih zraka. Svjetlost nastaje zračenjem elektromagnetskih valova iz izvora, a valovi se šire iz točkastog svjetlosnog izvora na sve strane jednako. Geometrijska optika bavi se proučavanjem svjetlosti uz pretpostavku (aproksimacija) da se taj val širi pravocrtno pa ga se prikazuje zrakom. Kada svjetlost (zraka) dođe do glatke površine koja se razlikuje od zraka npr. površine stakla ili vode, može se odbiti (refleksija) ili prijeći u drugo sredstvo uz promjenu smjera (refrakcija).

Svjetlosna zraka – svjetlosnu zraku opisujemo kao veoma uzak snop svjetlosti.

Optičko sredstvo – sredstvo u kojem se širi svjetlost.

Dioptar – granična ploha koja razdvaja dva optički prozirnna sredstva.

11.2. Zakoni geometrijske optike

1. *Zakon pravocrtnog širenja svjetlosti*

Svjetlost se širi pravocrtno.

2. *Zakon neovisnosti snopova svjetlosti*

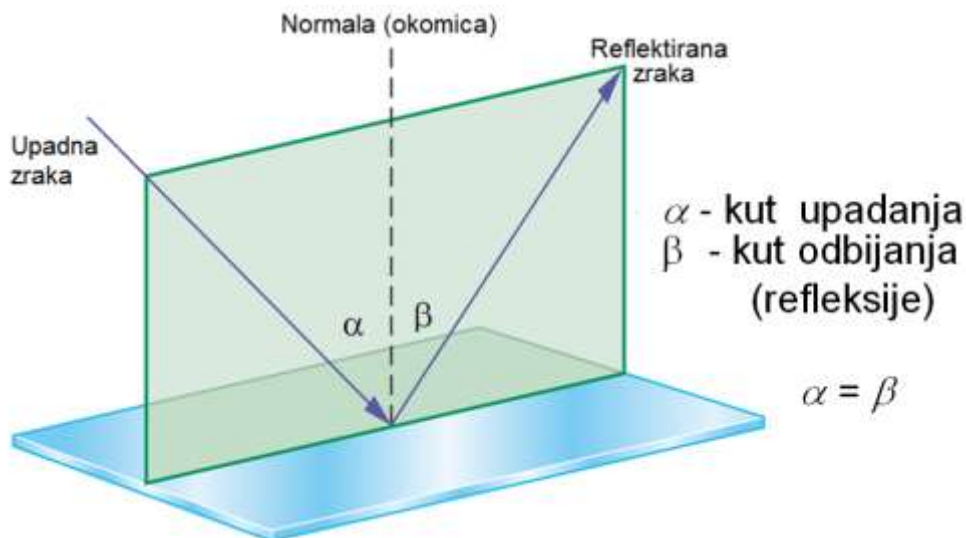
Ako dva snopa svjetlosti prolaze jedan kroz drugi ili se sijeku, tada ne djeluju jedan na drugi. Primjer neovisnosti snopova vidimo na pozornici kada se križaju svjetlosni snopovi dvaju ili više reflektora.

3. *Odbijanje ili refleksija svjetlosti*

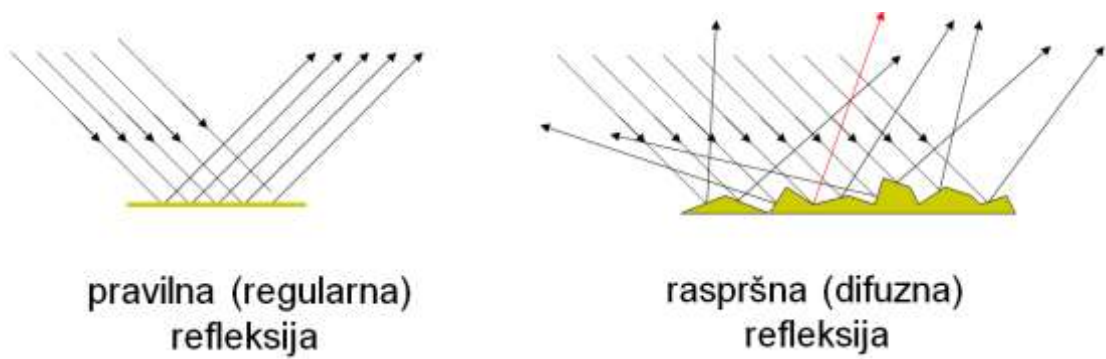
Kut upadne zrake svjetlosti na ravni dioptar jednak je kutu refleksije.



Slika 86. Neovisnost snopova

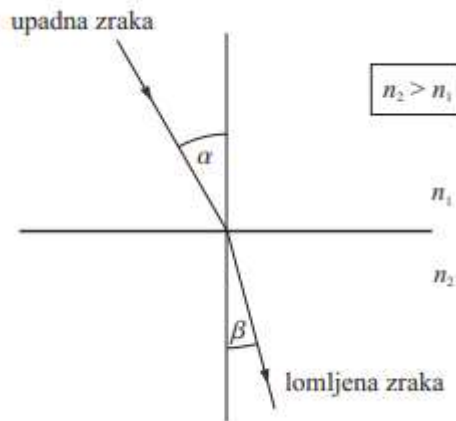


Slika 87. Odbijanje svjetlosti (upadna i reflektirana zraka definiraju ravninu koja je okomita na dioptar).



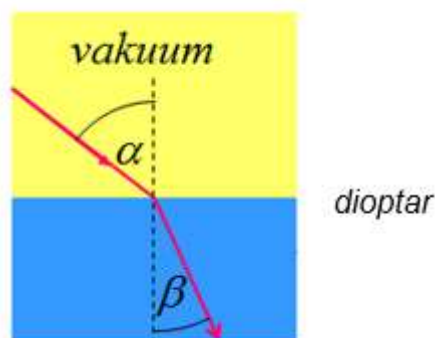
Slika 88. Pravilna i nepravilna refleksija

4. Lom (refrakcija) svjetlosti



Slika 89. Lom svjetlosti

Kada svjetlost prelazi iz sredstava gdje se brže širi u sredstvo gdje je brzina svjetlosti manja, svjetlost se lomi k okomici. Kada svjetlost prelazi iz sredstava gdje se sporije širi u sredstvo gdje je brzina svjetlosti veća, svjetlost se lomi od okomice. α je kut upadanja, β je kut odbijanja.



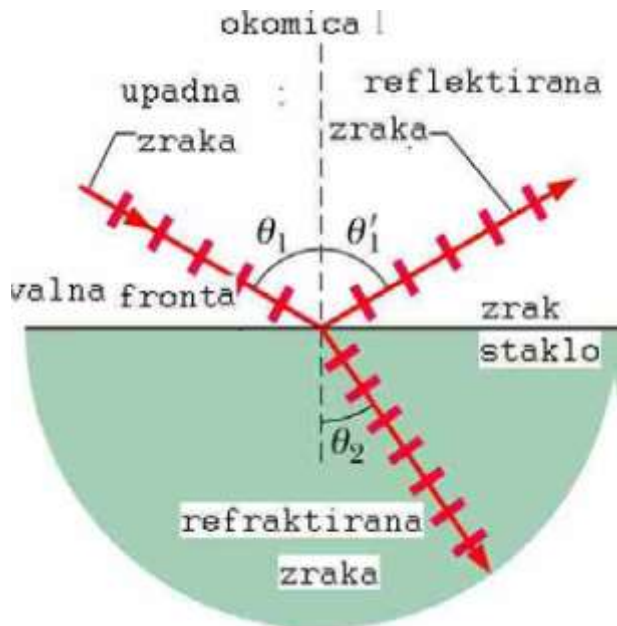
Slika 90. Lom svjetlosti (kada je prvo sredstvo vakuum, onda govorimo o apsolutnom indeksu loma).

Vrijedi:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, n = \frac{c}{v}$$

gdje je n apsolutni indeks loma ili indeks loma, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s brzina svjetlosti u vakuumu.

Pokusi pokazuju da su 3. i 4. zakon prisutni istovremeno gotovo uvijek u slučajevima prijelaza svjetlosti iz jednog optičkog prozirnog sredstva u drugo, kako je prikazano na slici 91.



Upadni snop svjetlosti pada na ravnu površinu i s definiranom okomicom na tu površinu zatvara kut upadanja θ_1 .

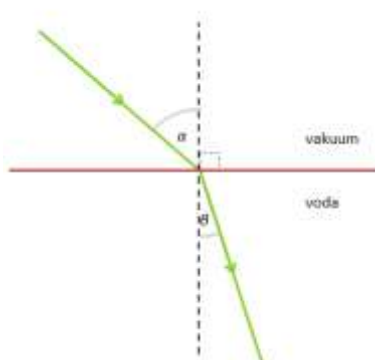
Dio upadnog snopa svjetlosti odbija se (reflektira) pod kutom koji je jednak upadnom kutu θ_1' u smjeru koji je prikazan na slici 91.

Dio svjetlosti lomi se u sredstvu 2 (na slici 91 sredstvo 2 je staklo) pod kutom θ_2 i to se naziva refrakcija ili lom svjetlosti.

Osim u slučaju kad svjetlost pada okomito na granicu koja razdvaja dva sredstva, pri lomu se mijenja smjer zrake svjetlosti. Smjer lomljene zrake s okomicom na granicu (sučelje) čini kut loma θ_2 .

Slika 91. Lom i odbijanje svjetlosti

Primjer 11.1. Lom svjetlosti pri prijelazu iz optički rjeđeg u optički gušće sredstvo.



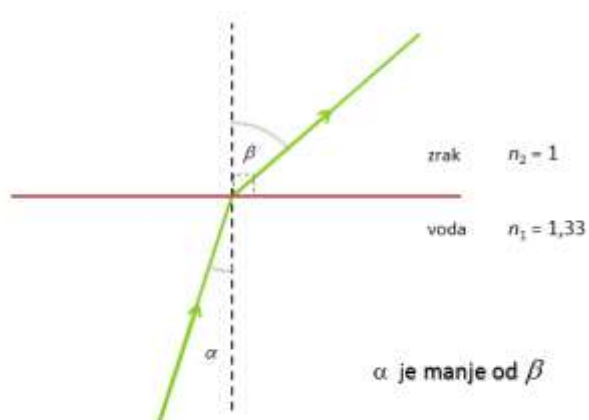
n	Brzina svjetlosti (m/s)
1	3×10^8
1,33	$2,26 \times 10^8$

Slika 92. Lom svjetlosti pri prijelazu iz gušćeg u rjeđe sredstvo



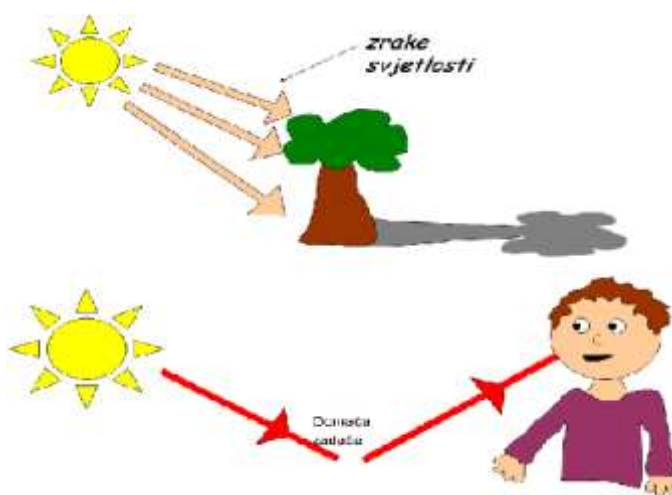
Slika 93. Primjer loma svjetlosti pri prijelazu iz gušćeg u rjeđe sredstvo

Primjer 11.2. Lom svjetlosti pri prijelazu iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo, kada je n_2 manje od n_1 .



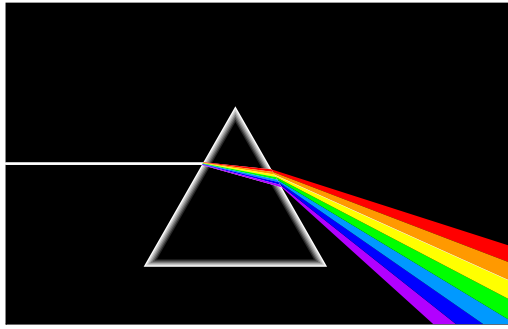
Slika 94. Lom svjetlosti pri prijelazu iz rjeđeg u gušće sredstvo

Kako vidimo stvari?



Slika 95. Mi predmete vidimo jer se svjetlost reflektira od predmeta u naše oko

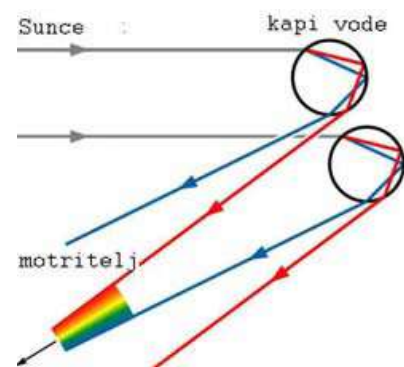
11.3. Kromatična disperzija



Slika 96. Disperzija svjetlosti

Indeks loma n u nekom sredstvu (osim u vakuumu) ovisi o valnoj duljini (boji) svjetlosti. Bijela svjetlost sastavljena je od svih valnih duljina (boja) vidljivog spektra s istim iznosom. Kada ta svjetlost dođe na granicu dvaju optičkih sredstava, različite boje se lome u različitim smjerovima, pa dolazi do širenja kromatične disperzije. Plava svjetlost ima veći indeks loma, pa više zakreće na izlasku iz prizme na slici 96 u odnosu na upadnu bijelu zraku.

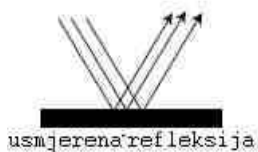
Duga je primjer disperzije. Kada bijela Sunčeva svjetlost susretne kapi kiše, dio svjetlosti se lomi u kapi, zatim se odbija od unutarnje granice kapi i zraka i onda se opet lomi na izlasku iz kapi. Zrake kraće valne duljine imaju veći indeks loma i više zakreću. Plava zraka (kraća valna duljina) više zakreće od crvene zrake, tako da na izlasku iz kapi nastaje širenje boja.



Slika 97. Nastajanje duge

11.4. Slike

Zrake svjetlosti koje dolaze do oka nakon što se reflektiraju od nekog predmeta, prolaze kroz oko, padaju na mrežnicu oka i u kori mozga stvaraju informaciju o predmetu (rubovi, smjer, oblik, boja) koju nazivamo slika predmeta. Mozak obrađuje i stvara sliku predmeta iako zrake ne dolaze u oko neposredno iz predmeta, već se prethodno odbiju ili lome u prozirnem sredstvu. Razlikujemo virtualne (prividne) i realne slike predmeta.

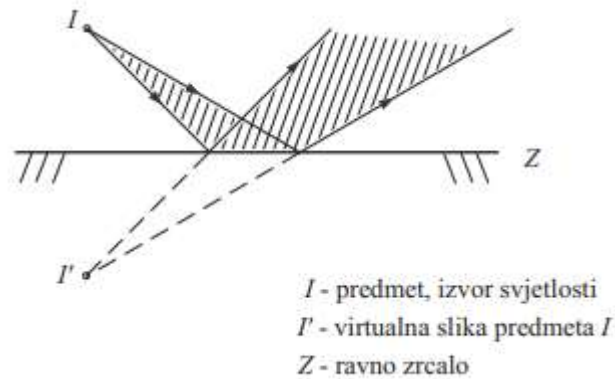


Slika 98. Refleksija

Ovisno o vrsti površine, refleksija može biti usmjerena ili difuzna. Na glatkoj površini kao što je posebno staklo zrake se odbijaju usmjereno. Na hrapavoj površini kao što je list papira zrake svjetlosti odbijaju se u svim smjerovima, što omogućuje čitanje iz bilo kojeg smjera. Odbijanje u proizvoljnim (random) smjerovima naziva se difuzna refleksija.

11.4.1. Virtualna slika

Virtualnu sliku objasnimo na primjeru zrcala. Ako se predmet nalazi ispred ravnog zrcala, čini nam se da je predmet iza zrcala (**prividna slika**) jer zrake koje ulaze u oko prividno dolaze iz tog smjera, gdje se predmet ne nalazi.

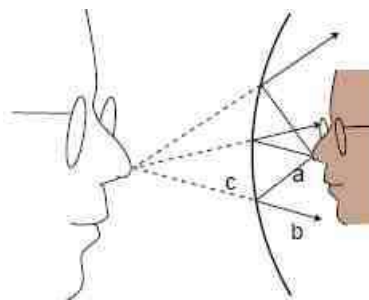


Slika 99. Nastajanje virtualne slike ispred ravnog zrcala

Prema dogovoru, udaljenost predmeta od zrcala je pozitivna veličina, a udaljenost slike od zrcala je negativna veličina.

Slično nastaje prividna slika ako je predmet blizu udubljenog, zakrivljenog zrcala koje se naziva konkavno zrcalo. Primijetite da je slika lika koji se gleda u zrcalu povećana.

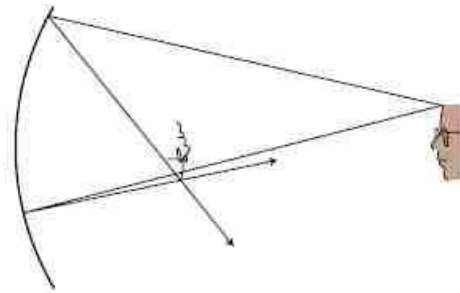
Ako na to mjesto stavimo fotografski papir, na njemu neće ostati trag jer tu nema zraka svjetlosti.



Slika 100. Nastajanje virtualne slike kod konkavnog zrcala

11.4.2. Realna slika

Realna slika nastaje od zraka koje se, nakon odbijanja ili loma, stvarno sijeku na nekom mjestu i dolaze u oko. Primjer je slika koja nastaje na zakrivljenom konkavnom zrcalu. Ako se na to mjesto stavi fotografski papir ili ekran, zrake će ostaviti trag ili se odbiti od ekrana. Zrake svjetlosti tu stvarno postoje.

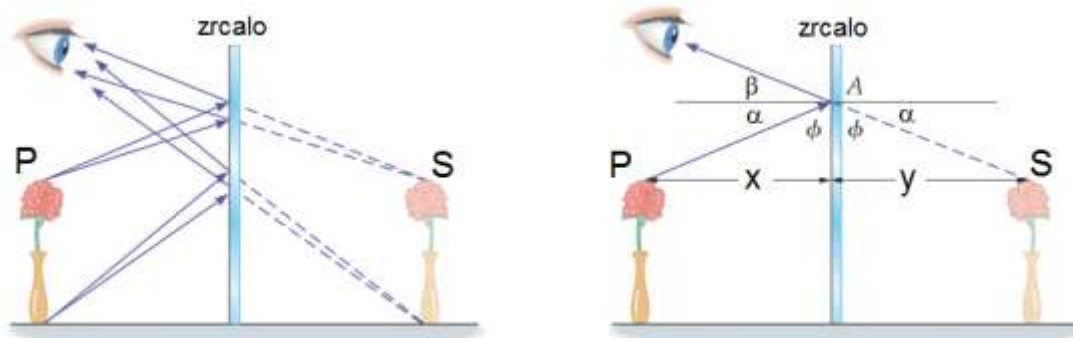


Slika 101. Nastajanje realne slike u konkavnom zrcalu

11.5. Zrcala

Zrcalo je svaka glatka površina koja dobro reflektira svjetlost. Razlikujemo ravno i sferno zrcalo.

Ravno zrcalo



Slika 102. Dobivanje slike na ravnom zrcalu

Na slici 102 prikazano je dobivanje slike na ravnom zrcalu.

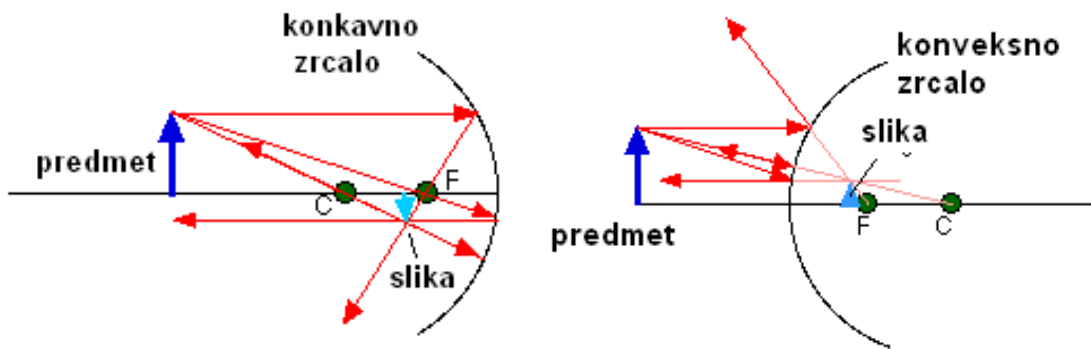
Sferno zrcalo je dio kugline sfere koja jednom svojom stranom dobro odbija svjetlost. Ako svjetlost odbija svojom unutarnjom stranom, onda je to udubljeno ili konkavno zrcalo, a ako odbija svjetlost vanjskom stranom, onda je to izbočeno ili konveksno zrcalo. Točka C je središte zakrivljenosti sfernog zrcala, a točka T tjeme sfernog zrcala, i to je najizbočenija točka sfernog zrcala. Udaljenost između točaka CT je polumjer zakrivljenosti sfernog zrcala R . Točka F je fokus ili žarište sfernog zrcala. I ona je na polovini udaljenosti polumjera R .

F – fokalna ili žarišna duljina zrcala jednaka je polovini duljine polumjera R .

Vrijedi : $f = \frac{1}{2} r$



Slika 103. Sferno zrcalo



Slika 104. Karakteristične zrake kod konkavnog i konveksnog zrcala

Virtualna slika predmeta je udaljenija i uvećana (zrcala za *make up* ili za brijanje). Ako se ravna površina izboči, nastane konveksno zrcalo. Središte zakrivljenosti je iza zrcala. Virtualna slika se približi zrcalu i umanjena je. Prema dogovoru udaljenost središta zrcala zakrivljenosti i tjemena je r , r je negativna veličina.

11.5.1. Jednadžba sfernog zrcala

Može se pokazati da je veza između žarišne udaljenosti f , udaljenosti predmeta (oznaka p ili x)

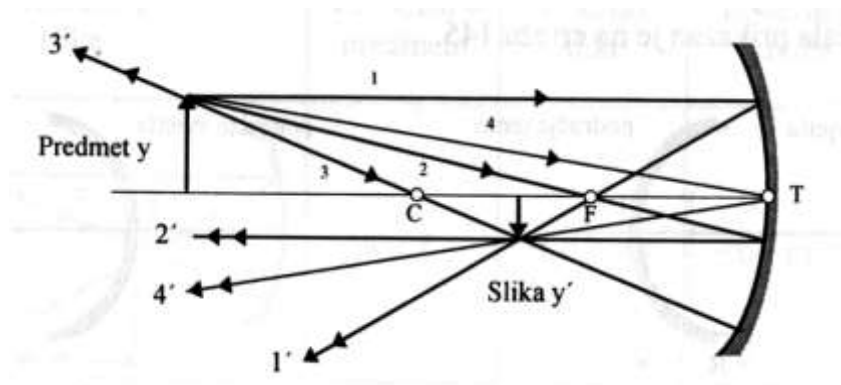
i udaljenosti slike (oznaka i ili x') dana formulom: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$.

Povećanje m : $m = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$

x – udaljenost predmeta od zrcala
 y – udaljenost slike
 f – žarišna daljina
 y' – veličina slike
 X' – veličina predmeta
 m – linearno povećanje

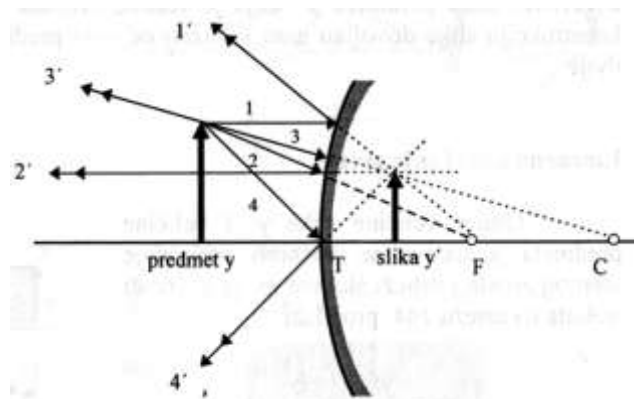
Predznak (-) označuje da je slika obrnuta u odnosu prema predmetu ako su udaljenosti a i b pozitivne.

11.5.2. Konstrukcija slike kod konkavnog zrcala



Slika 105. Konstrukcija slike kod konkavnog zrcala

11.5.3. Konstrukcija slike kod konveksnog zrcala



Slika 106. Konstrukcija slike kod konveksnog zrcala

Primjer 8.3. Konkavno zrcalo

Čovjek gleda u konkavno zrcalo polumjera zakrivljenosti $R = 1$ m. Za koliko mora biti udaljen od zrcala da vidi sebe dva puta povećanim?

$$R = 1 \text{ m}$$

$$y' = 2 y$$

$$a = ?$$

$$\text{Rješenje: } \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$b = -a \frac{y'}{y} = -\frac{2y}{y} a = -2a$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{-2a} = \frac{2}{1 \text{ m}}$$

$$a = 25 \text{ cm}$$

Primjer 8.4. Konveksno zrcalo

Kuglica promjera 2 cm zrcali se na konveksnom zrcalu polumjera 40 cm udaljenom 100 cm. Kolika je veličina slike?

$$\text{Jednadžba sfernog zrcala: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R},$$

gdje je:

a udaljenost predmeta od zrcala

b udaljenost slike od zrcala

f žarišna udaljenost

R polumjer zakrivljenosti zrcala.

Kod konveksnog zrcala udaljenost virtualnih slika b i fokalna daljina f imaju negativan predznak.

Rješenje:

$$y = 2 \text{ cm}$$

$$R = 40 \text{ cm}$$

$$a = 100 \text{ cm}$$

$$y' = ?$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R}$$

$$b = \frac{a \cdot R}{2a + R}$$

$$\text{Veličina slike kuglice je: } \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

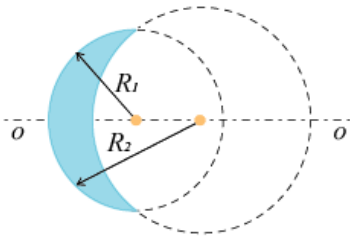
$$y' = \frac{b}{a} y = \frac{a \cdot R}{2a + R} y$$

$$y' = 16,67 \text{ cm}$$

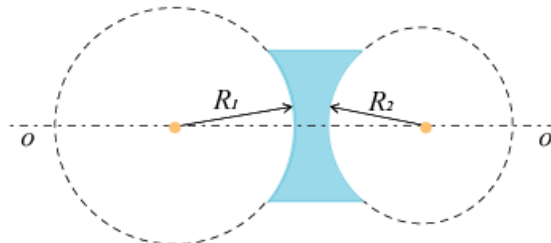
11.6. Leće

Optičko prozirno tijelo omeđeno dvama dioptrima (dva sferna ili jedan sferni i jedan ravni dioptrar) nazivamo leća. Leće su prikazane na slici 107 i 108.

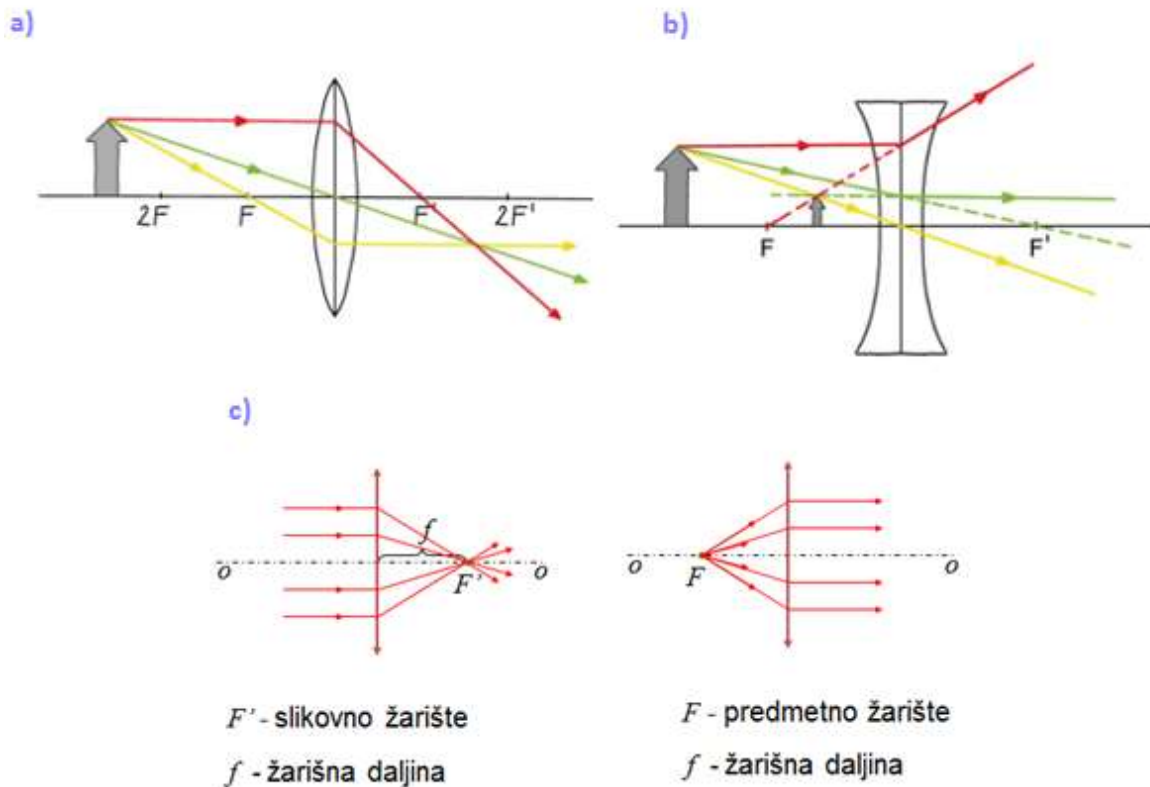
To su prozirni objekti koji imaju dvije refraktivne plohe (koje lome svjetlost). Leće koje skupljaju paralelni snop zraka nazivaju se konvergentne. One koje šire snop svjetlosti jesu divergentne.



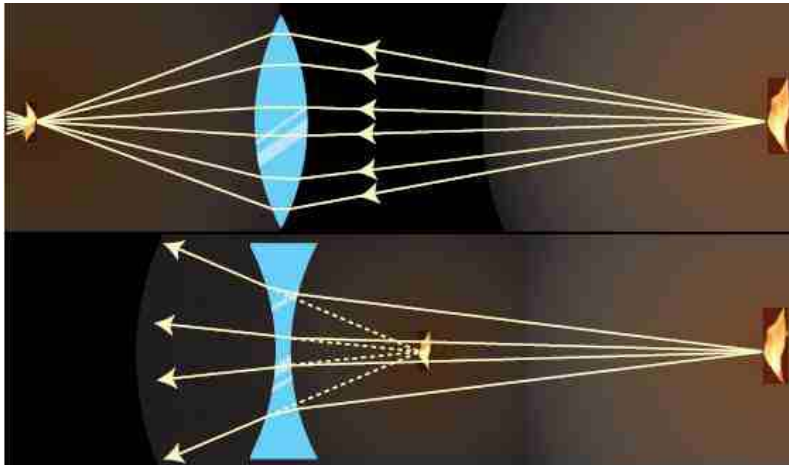
Slika 107. Konvergentna leća



Slika 108. Divergentna leća



Slika 109. a) Karakteristične zrake konvergentne leće, b) karakteristične zrake divergentne leće, c) žarišta za sliku i predmet



Na slici 110 (gornja slika) konvergentna leća daje realnu sliku plamena. Na tom bi se mjestu zacrnio fotografski film. Na slici 110 (slika ispod) divergentna leća daje prividnu (virtualnu) sliku plamena jer se motritelju čini kao da zrake izviru iz prividne slike. Ako na to mjesto stavite ruku, nećete se opeći.

Slika 110. Konvergentna leća (gornja slika) i divergentna leća donja slika

$$\text{Jakost leće: } j = \frac{1}{f} \text{ [dioptriya = m}^{-1}\text{]}$$

$$j = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ u sredstvu indeksa loma } n_s$$

$$j = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ u vakuumu (zraku)}$$

11.6.1. Jednadžba leće

Relacija između žarišne udaljenosti f , udaljenosti predmeta (oznaka p ili x) i udaljenosti slike (oznaka i ili x') dana je formulom kao i za sferno zrcalo: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$.

Kada je tanka leća indeksa loma n okružena zrakom, žarišna se udaljenost leće može odrediti pomoću optičarske jednadžbe:

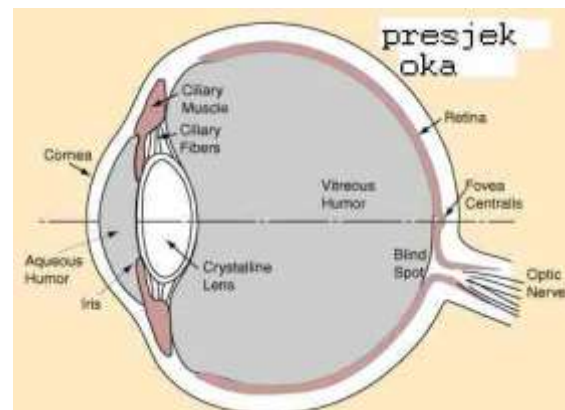
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Tu r_1 označuje radijus zakrivljenosti površine leće bliže predmetu, a r_2 radijus druge površine. Prema dogovoru x je pozitivan ako idući od predmeta prema leći dolazimo do konveksne površine, a negativan ako nailazimo na konkavnu površinu. Ako je leća okružena uljem ili drugim medijem indeksa loma većim od 1, onda u jednadžbi n treba zamijeniti n/n_{ulja} .

11.7. Akomodacija oka

Oko može na mrežnici dati sliku predmeta koji su veoma udaljeni od oka pa sve do udaljenosti koju nazivamo bliska točka oka, koja za zdravo oko iznosi oko 25 cm. Ta sposobnost oka naziva se akomodacija oka.

Od predmeta koji su jako daleko od oka na oko pada paralelni snop svjetlosti koji se fokusira na mrežnici.



Slika 111. Presjek oka

Zrake od predmeta koji je bliže više divergiraju, pa se moraju jače lomiti da bi pale na mrežnicu (retinu). Očni mišići se stegnu i povećaju zakrivljenost leće.

Primjenom jednadžbe leće, uz pretpostavku da je oko dugo oko 2 cm, može se izračunati:

a) Vrlo daleki predmet $x = \infty$, $x' = 0.02m$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0,02} = \frac{1}{f}$$

pa slijedi da je žarišna udaljenost oka kao konvergentne leće $f = 0,02$ m.

Ako se definira jakost leće kao recipročna vrijednost žarišne udaljenosti (dpt = dioptrija)

$$\frac{1}{f} = j \text{ (Dpt = m}^{-1}\text{)},$$

onda će jakost leće biti 50 dpt.

b) Predmet u bliskoj točki $x = 0,25m$, $x' = 0,02m$, tada slijedi $\frac{1}{0,25} + \frac{1}{-0,02} = \frac{1}{f}$

pa slijedi da se f smanjio na 0,018 m, a jakost povećala na 54 dpt.

11.8. Lupa ili jednostavno povećalo

Ako se predmet približi bliže od bliske točke oka, nestaje slika i oko vidi mutnu mrlju.



Slika 112. a) Predmet u bliskoj točki oka, b) predmet na manjoj udaljenosti od bliske točke

Na slici 112 lijevo prikazan je predmet smješten u bliskoj točki oka. Veličina slike u oku ovisi o vidnom kutu ϑ . Povećali bismo ga ako bismo predmet približili oku (slika 112 desno), ali onda slika postaje mutna.

Jasnoća slike može se popraviti ako se ispred oka stavi konvergentna leća takve jakosti koja će dati sliku predmeta koja je smještena bliže od fokusa povećala F , u bliskoj točki oka. Kutno povećanje definira se kao omjer kuta ϑ' (kada je ispred oka povećalo) i kuta ϑ kada je predmet

u bliskoj točki $m_{kutno} = \frac{\vartheta'}{\vartheta}$.

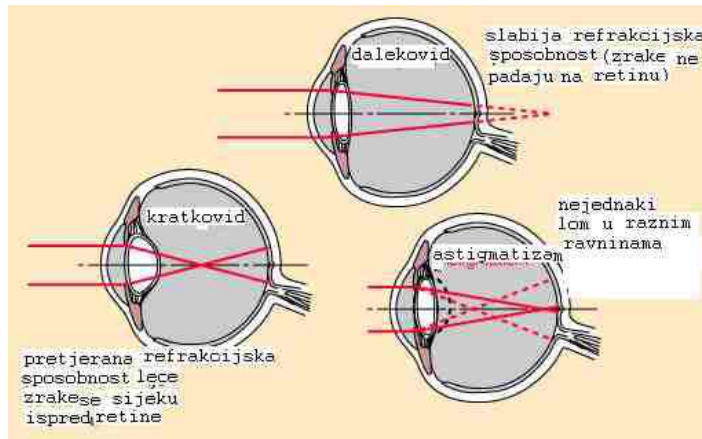
Uz pretpostavku da se povećalo koristi tako da se predmet smjesti u fokus, može se kutno povećanje približno izraziti formulom: $m_{kutno} = \frac{25\text{cm}}{f}$.

Primjer 11.5. Ako bi žarišna udaljenost povećala bila 5 cm (leća jakosti +20 dpt), kutno povećanje bilo bi 5 puta.

11.9. Mane oka i korekcija pomoću naočala

Mane oka su:

- Dalekovidnost je pojava kod koje leća oka nedovoljno skuplja zrake pa slika predmeta ne pada na mrežnicu (retinu).
- Kratkovidnost je pojava kod koje leća oka previše lomi zrake svjetlosti pa se daleki predmeti ne vide jasno.
- Astigmatizam je pojava nejednakog loma u različitim ravninama koje presijecaju očnu leću.



Slika 113. Mane oka

Mane oka se ispravljaju lećama – naočalama.

Kratkovidnost se popravja pomoću divergentne leće (negativna žarišna udaljenost) koja zrake svjetlosti raširi prije nego dođu do oka. Takvo oko ima daleku točku (najveća udaljenost iz koje se predmet još vidi jasno) ne u beskonačnosti (npr. zvijezde), već znatno bliže, npr. na udaljenosti od 1 m.

Kojim lećama popraviti tu manu oka?

Ispred oka treba biti leća koja će sliku dalekog predmeta ($x = \infty$) dati u dalekoj točki oka. Kako je to virtualna slika, ima negativni predznak ($x = -1$ m). Uvrštavanjem u jednadžbu leće dobije se potrebna jakost i vrsta leće:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{f}$$

Treba upotrijebiti naočale jakosti -1 dpt (divergentne leće deblje na rubovima).

Dalekovidno oko ima slabu refrakcijsku snagu, pa mu je bliska točka ne 25 cm udaljena od oka, već npr. 1 m. Očni mišić oka napreže se povećati zakrivljenost leće, ali ne uspijeva. Pojava je tipična kod ljudi srednjih godina i znak je popuštanja očnog mišića.

Dalekovidni ljudi isprva ne primjećuju slabljenje očnog mišića i udaljavaju tekst koji čitaju. Pojava napreduje tijekom otprilike jedne godine u dobi od oko 45 godina.

Pomoć su naočale koje imaju zadatak od predmeta udaljenog oko 25 cm dati sliku (opet virtualnu) na udaljenosti 1 m. Uz vrijednosti $x = 0,25$ m i $x' = -1$ m jednačba leće ima oblik:

$$\frac{1}{0,25} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{f}.$$

Treba nositi naočale jakosti 3 dpt (konvergentna leća, tanja na rubovima).

Primjer 11.6. Rezolucija oka

Gledatelj ispravnog vida nalazi se 0,8 m udaljen od monitora računala veličine dijagonale 19 inča (1 inč = 2,54 cm, odnosno 19 inča = 48,26 cm).

- a) Koliki je najmanji razmak dviju točaka (piksela) u stupcu monitora ako je omjer stranica monitora 4 : 3, a broj stupaca u odnosu na broj redaka je 1024 x 768?

Rezultat izrazite s točnošću od 0,1 mm.

- b) Može li gledatelj razlučiti dvije tako udaljene točke ako je njegova moć razlučivanja 1,8 puta slabija od Tyche Brachea koji je mogao razlučiti kutni razmak (α) od jedne lučne minute?

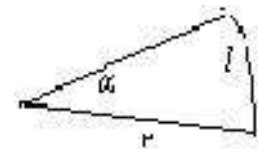
- c) Koliko se možete udaljiti od monitora, a da još možete razlučiti te dvije točke?



Napomena:

Lučna minuta je šezdeseti dio stupnja. Upotrijebite izraz koji

povezuje: kutni razmak (α), luk (l) i udaljenost (r): $\alpha = \frac{l}{r}$.



Rješenje:

a)

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \text{ pa je } a = \frac{4}{3}b \quad \text{uvrštavanjem u prvi izraz dobije se:}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2} = \frac{5}{3}b$$

$$b = \frac{3}{5}d = 11,4 \text{ inča} = 28,96 \text{ cm}$$

$$a = \frac{4}{5}d = 15,2 \text{ inča} = 38,61 \text{ cm}$$

b) - moć razlučivanja Tyche Brachea je $\alpha_{TB} = 1'$

- moć razlučivanja učenika je $\alpha_{učenika} = 1,8 \cdot 1' = 1,8'$

$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ pa je } l = \alpha \cdot r = 1,8' \cdot 0,8 m = 1,8 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \cdot 0,8 m$$

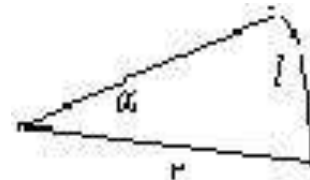
Stupnjeve pretvaramo u radijane:

$$1^{\circ} = \frac{2\pi}{360} = \frac{6,28}{360} \text{ radijana}$$

$$\text{pa slijedi } l = 1,8 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{6,28}{360} \text{ rad} \cdot 0,8 m = 0,4 mm .$$

c) Učenik ima oštrinu vida koja mu dopušta razlučiti 0,4 mm s udaljenosti od 0,8 m od monitora, što je manje od veličine piksela (0,5 mm), pa može razlučiti svaki piksel.

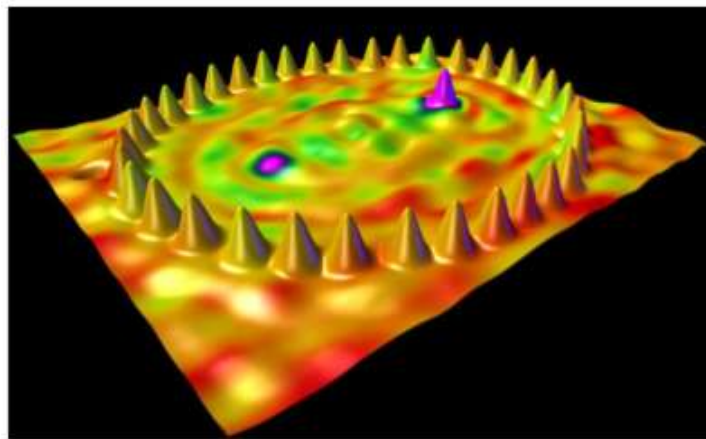
$$r = \frac{l}{\alpha} = \frac{0,5 mm}{1,8 \cdot \frac{2\pi}{60 \cdot 360} \text{ rad}} = \frac{0,5 mm \cdot 60 \cdot 360}{1,8 \cdot 2\pi} = 0,995 m$$



12. Kvantna fizika

12.1. Uvod u kvantnu fiziku

Kvantna fizika proučava svijet izvan čovjekova svakidašnjeg iskustva – mikroskopski svijet atoma i molekula.



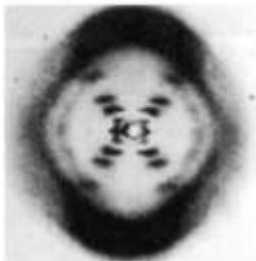
Slika 114. Pojedinačni atomi dobiveni s pomoću skenirajućeg tunelirajućeg mikroskopa

Stošci na slici predstavljaju pojedinačne atome poredane u oval (koral) dobivene s pomoću STM-a (skenirajućeg tunelirajućeg mikroskopa).

Kvantna fizika postavlja i dobiva odgovor na pitanja kao što su:

- zašto sjaje zvijezde
- zašto kemijski elementi pokazuju red tako očit u periodnom sustavu
- zašto metali provode električni struju, a staklo ne provodi
- kako radi mikro- i nanoelektronika
- kako prenositi informacije na način da su pošiljatelj i primatelj poruka sigurni da ih nitko nije dešifrirao (kvantno računarstvo i kvantna kriptografija).

Kvantna fizika je temelj kemije i biokemije i, ako želimo razumjeti život, treba ju naučiti i znati se njom koristiti. Slika 115 prikazuje rendgenski snimak dvostrukog heliksa DNK molekule od koje su izgrađeni geni (Rosalind Franklin, 1953.).




Slika 115. Rendgenski snimak DNK molekule

Osnovna je zamisao u kvantnoj fizici da se mnoštvo veličina u prirodi pojavljuju (mjere) u nekom minimalnom iznosu (kvantu) ili cjelobrojnom višekratniku tog iznosa. U svakidašnjem iskustvu tomu bi odgovarale npr. kune: najmanji iznos je 1 lipa, svi veći iznosi su višekratnici najmanjeg iznosa, tj. $n \cdot 1$ (lipa).

12.2. Planckov zakon zračenja crnog tijela

Pojam kvanta uveo je Planck 1900. godine. Naime, klasična teorija zračenja predviđa da je iznos zračenja u nekom području frekvencija proporcionalan broju stanja (modova) koje tijelo može imati u tom području.

radijacijska stanja u crnom tijelu

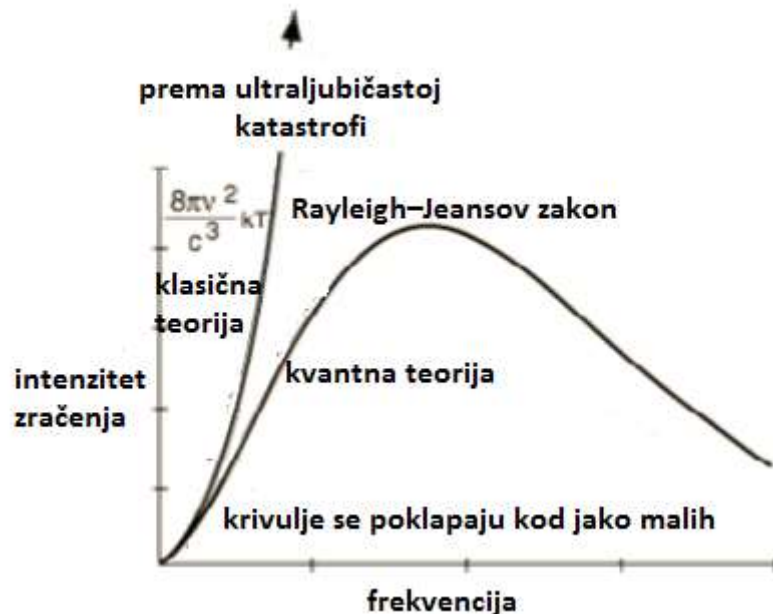


	broj stanja	vjeroja. pobude	energija po stanju
CLASSICAL	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	ista za sva stanja	kT
QUANTUM	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	obrnuto razajerna frekvenciji	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

Slika 116. Radijacijska stanja u crnom tijelu

Svako stanje jednako je vjerojatno i ima prosječnu energiju kT , a broj stanja je proporcionalan kvadratu frekvencije. Posljedica bi bila sve veći iznos zračenja kako raste frekvencija, što je dobilo naziv "ultraljubičasta katastrofa". Proračun su napravili Rayleigh i Jeans. Mjerenje zračenja crnog tijela pokazuje da se to ne događa.

Graf intenziteta zračenja ovisno o frekvenciji pokazuje rast na malim frekvencijama, ima maksimum (*peak*) na nekoj frekvenciji i pada prema nula na višim frekvencijama:



Slika 117. Graf intenziteta zračenja

Planckova hipoteza jest da se zračenje realizira u paketićima energije (kvantima) $h\nu$, a vjerojatnost da se dogodi zračenje opada eksponencijalno s frekvencijom. Ta pretpostavka vodi do zakona zračenja užarenog tijela koje se dobro slaže s pokusom.

12.3. Fotoelektrični efekt

Einstein je 1905. godine objasnio pojavu izbijanja elektrona iz metala s pomoću svjetlosti. Ta se pojava naziva fotoelektrični efekt. Pretpostavio je da je svjetlost (elektromagnetski val određene frekvencije) roj paketića (kvanata) energije koje je nazvao fotonima. Energija jednog fotona proporcionalna je njegovoj frekvenciji, a konstanta h je izvanredno mala i naziva se Planckova konstanta:

$$E = h \cdot \nu, \text{ gdje je } h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Kako uskladiti predodžbu vala (valne duljine λ , frekvencije ν i brzine c povezanih formulom $\nu = \frac{c}{\lambda}$), koji zamišljamo kao kombinaciju električnog i magnetskog polja čiji iznos oscilira

frekvencijom ν i pokazuje svojstva interferencije, difrakcije i polarizacije i paketića energije – fotona (koji u apsorpciji zračenja u nekom materijalu nestaju povećavajući energiju atoma ili se pak rađaju u emisiji zračenja)? Dvojna narav svjetlosti (vala i nakupine energije) proširena je poslije ne samo na elektromagnetsko zračenje nego i na sve čestice koje imaju masu. Elektroni u metalu gibaju se slobodno, ali ne mogu izaći iz metala pri sobnoj temperaturi.

Energija potrebna elektronu da izađe iz metala naziva se izlazni rad i označuje s W . Specifična je za pojedini metal i reda je veličine eV -a:

Vrsta metala	Izlazni rad (eV)
Cu	4.7
Zn	4.3
Na	2.27
Cs	1.96

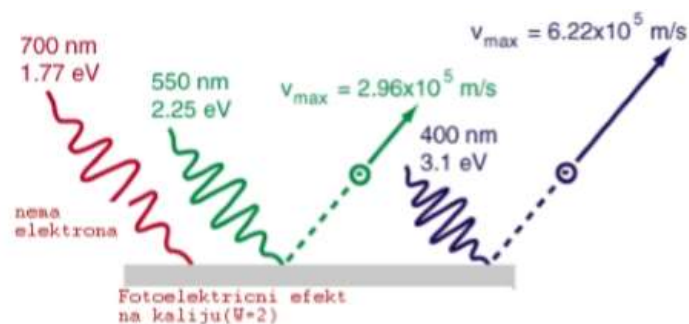
Slika 118. Izlazni rad za različite metale

Ako elektron dobije energiju veću od W , može izaći iz metala i tada ima i kinetičku energiju. Jedan od načina da elektron izađe iz metala jest površinu metala izložiti zračenju (roju fotona energije $h \cdot \nu$ koju predaje elektronima u metalu).

Vrijedi: $h\nu = W + E_k$.

Pokus pokazuje da se fotoefekt zbiva samo ako je frekvencija zračenja veća od neke granične frekvencije ν_0 (ili ako je valna duljina manja od neke granične).

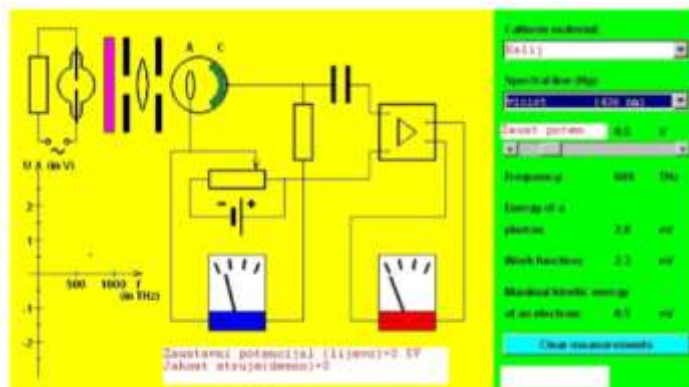
$$E_{\text{fotona}} = h \cdot \nu$$



Slika 119. Fotoelektrični efekt

Ako svjetlost određene frekvencije ne izbija svjetlost, pomaže li ona povećati intenzitet svjetlosnog izvora? U klasičnoj fizici očekujemo da je učinak vala veći što mu je amplituda veća (a onda i intenzitet jer je $I \approx A^2$). Val većeg intenziteta trebao bi, prema pretpostavci klasične fizike, jače pobuditi elektron u metalu i izbaciti ga iz metala pri nekoj razini intenziteta.

Ali, pokus pokazuje da se to ne događa. Drugi pokus koji ispituje narav fotoefekta jest uvođenje zaustavnog potencijala, tj. takva potencijala koji zaustavlja izbačene fotoelektrone.



Slika 120. Zaustavni potencijal koji zaustavlja izbačene fotoelektrone

Kad je frekvencija zračenja veća od granične, elektroni izlaze iz metala i imaju neku kinetičku energiju. Da bi ih se zaustavilo, treba primijeniti energiju električnog polja $e \cdot V_z$.

Ako je potencijal jednak zaustavnom $E_k = e \cdot V_z$. Ako se taj izraz uvrsti u Einsteinovu formulu za fotoefekt, dobije se $V_s = \left(\frac{h}{e}\right) \cdot \nu - \frac{W}{e}$. Kako su h , e i W konstante za neki metal, primjećujemo da je funkcija $V = f(\nu)$ pravac nagiba h/e . Ako se zna vrijednost elementarnog naboja e , iz poznatog se nagiba pravca može izračunati Planckova konstanta.

Primjer 12.1. Pokus fotoefekta s cezijem daje zaustavni potencijal 0,7 V pri zračenju valne duljine $\lambda = 436$ nm, a 0,1 V pri zračenju 546 nm. Iz tih podataka izračunajte Planckovu konstantu, granične frekvencije i izlazni rad elektrona.

$$h \cdot \nu_1 = h \cdot \nu_0 + E_{k1} \quad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{546 \cdot 10^{-9} m} = 549 \cdot 10^{22} Hz$$

$$h \cdot \nu_2 = h \cdot \nu_0 + E_{k2} \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{436 \cdot 10^{-9} m} = 688 \cdot 10^{22} Hz$$

Rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznicama dobije se za h :

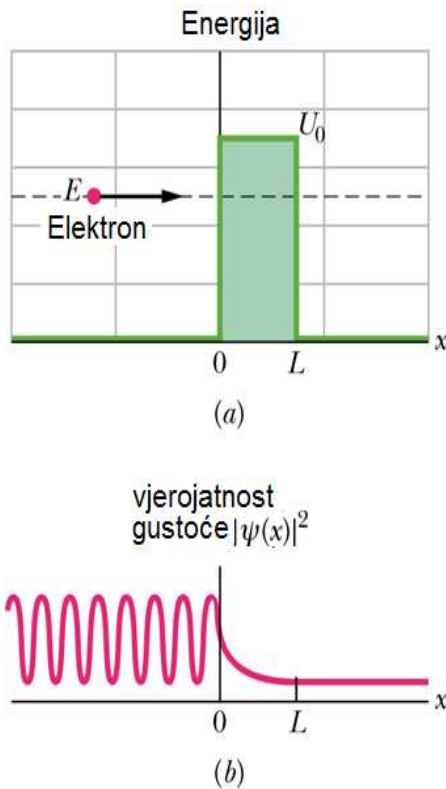
$$h = \frac{W_2 - W_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{(U_2 - U_1) \cdot e}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{(0,7V - 0,1V) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} C}{(688 - 549) \cdot 10^{22} Hz} = 6,39 \cdot 10^{-34} Js .$$

$$\text{Izlazni rad} = h\nu_1 = 6,39 \cdot 10^{-34} Js \cdot 688 \cdot 10^{22} Hz = 43,07 \cdot 10^{-10} J$$

12.4. Tunel-efekt

Na slici 121 prikazan je elektron koji ima ukupnu energiju E dok se giba u smjeru osi x .

Potencijalna energija mu je nula, osim u području $0 < x < L$, gdje je $U = U_0$.



Slika 121. Tunel-efekt

Ovo se područje naziva potencijalna barijera. U klasičnoj fizici elektron bi se reflektirao od potencijalne barijere. U kvantnoj fizici elektron je val materije koji ima određenu vjerojatnost da će proći kroz potencijalnu barijeru i da će se pojaviti s druge strane barijere.

Ako širina prepreke L nije prevelika, vjerojatnost da se elektron pojavi na položaju $x = L$ nije nula. Desno od barijere gustoća vjerojatnosti je mala, ali stalna. Tu je moguće detektirati elektron.

Koeficijent transmisije T opisuje vjerojatnost tuneliranja. Npr. ako je $T = 0,01$, onda će od 1000 elektrona koji dolaze do barijere, njih 10 proći kroz nju, a 990 će se odbiti.

Primjer 12.2. Razmotrite potencijalnu barijeru koju vidite na a) dijelu slike 110, koja ima visinu i debljinu $L = 0,6$ nm. Kolika je energija upadnog elektrona čiji je koeficijent transmisije $T = 0,002$? Energiju izračunajte u eV-ima.

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}}$$

$$T \approx e^{-2kL}$$

$$T \approx e^{-2kL} / \ln$$

$$\ln T \approx -2kL$$

$$k \approx \frac{\ln T}{-2L}$$

$$k = 5,17884 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}} / 2$$

$$U_0 - E = \frac{k^2 h^2}{8\pi^2 m}$$

$$U_0 - E = 1,2809 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$U_0 - E = \frac{1,2809 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 0,8 \text{ eV}$$

$$E = 5 \text{ eV} - 0,8 \text{ eV} = 4,2 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

12.5. Osnovni fizikalni princip rada lasera

Akronim od engl. *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*: uređaj koji pojačava svjetlost s pomoću stimulirane emisije zračenja.

Induciranu stimuliranu emisiju zračenja predvidio je u svojim radovima već 1917. Albert Einstein. Takvu emisiju u vidljivom području teorijski su obradili A. L. Schawlow, C. H. Townes i A. M. Prohorov 1958., a T. H. Maiman konstruirao je 1960. prvi laser kojemu je aktivna tvar bio kristal rubina stimuliran bijelom svjetlosti. Prvi plinski laser, sa smjesom helija i neona, bio je konstruiran 1961., prvi poluvodički 1962., a prvi tekući 1963. godine.

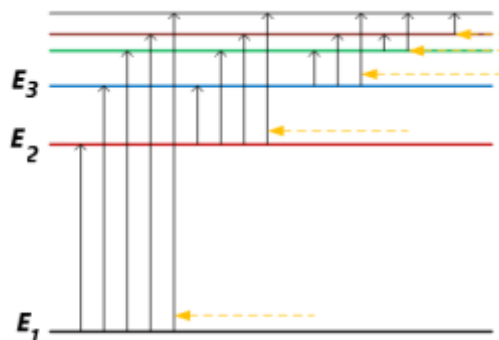
Najvažnija karakteristika lasera jest da sve laserske zrake tvore jednu zajedničku zraku i imaju iste karakteristike:

- imaju istu boju, tj. točno određenu valnu duljinu (monokromatsko svjetlo)
- imaju istu brzinu i energiju (međufazni odnosi valova u prostoru i vremenu su konstantni – koherentno svjetlo)
- imaju isti smjer kretanja (svi fotoni, tj. zrake, kreću se paralelno te čine uzak snop = kolimiranost).

Razmotrimo izolirani atom koji može biti ili u svojem osnovnom stanju (stanju s najnižom energijom) E_0 ili u pobuđenom stanju (stanju s višom energijom) E_x . Postoje tri različita fizikalna procesa kroz koja atom može prelaziti iz jednoga u drugo stanje.

12.5.1. Stimulirana emisija

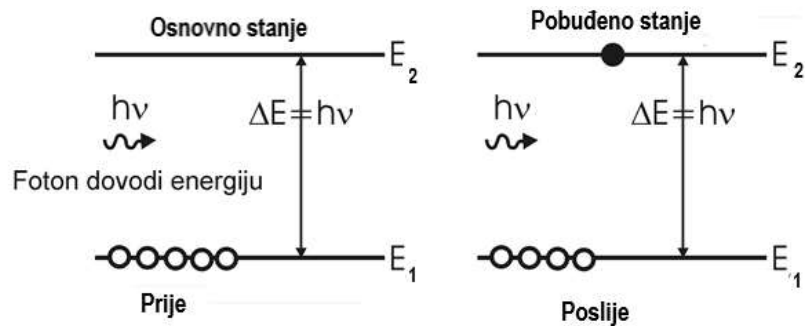
Atom se može nalaziti u osnovnom energijskom stanju – stanju najniže energije E_1 ili u nekom od pobuđenih stanja: E_2 , E_3 itd.



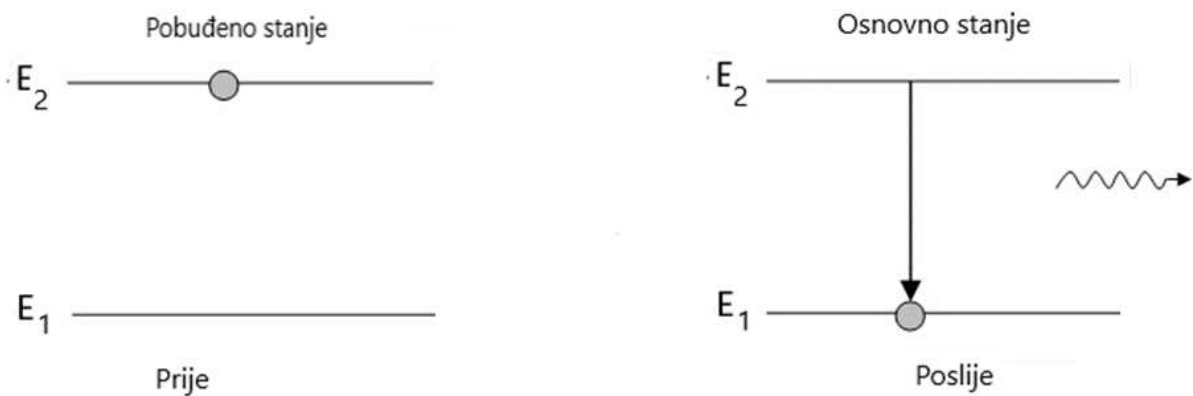
Slika 122. Enerzijska stanja atoma. Osnovno enerzijsko stanje je E_1 , a ostalo su pobuđena stanja.

Pri prijelazu iz nekog pobuđenog u osnovno stanje atom može spontano emitirati samo foton kojemu je energija jednaka razlici energija odgovarajućih enerzijskih razina.

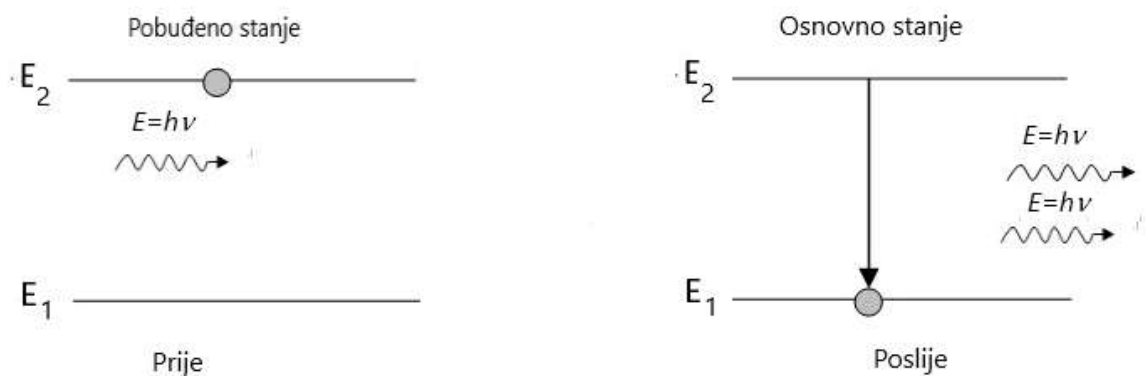
Ako foton nalijeće na atom koji se nalazi u osnovnom energijskom stanju, atom će apsorbirati foton samo ako je energija fotona jednaka razlici energija odgovarajućih energijskih razina $E_2 - E_1$, $E_3 - E_1$ itd. (slika 122). Rezultat: atom će doći na višu energijsku razinu, odnosno u neko pobuđeno stanje.



Slika 123. Apsorpcija fotona



Slika 124. Spontana emisija



Slika 125. Stimulirana emisija fotona

Kada se atom nađe u nekom od pobuđenih stanja, zadržava se u njemu vrlo kratko (oko 10^{-8} s) i sam od sebe prelazi na nižu energijsku razinu te pri tome emitira foton, energija kojega je jednaka razlici energija odgovarajućih energijskih razina.

Tako nastaje spontana emisija fotona (slika 125). Tako dobiveno zračenje je nekoherentno. To je zračenje bilo kojeg običnog izvora svjetlosti. Međutim, moguće je atom koji se već nalazi u nekom pobuđenom stanju prisiliti na emisiju fotona prije nego što bi on to učinio spontano.

Neka se atom već nalazi u jednom pobuđenom stanju i neka foton energije

$$h\nu_{21} = E_2 - E_1$$

(E_1 – energija početne, više energetske razine

E_2 – energija konačne, niže energetske razine

h – Planckova konstanta

ν_{21} – frekvencija emitiranog fotona svjetlosti)

naleti na njega, tada će upadni foton uzrokovati vraćanje atoma u osnovno stanje, pri čemu će se emitirati drugi fotoni iste energije, istog smjera i iste faze kao i upadni foton. Stimuliranom emisijom dobiju se dakle dva fotona koja mogu u lančanom procesu stimulirati ostale atome na emitiranje fotona. Da bi vjerojatnost stimulirane emisije fotona bila veća, potrebno je postići stanje inverzne naseljenosti. To je stanje kada se većina atoma nalazi u istom pobuđenom stanju. S druge strane, atomi se moraju dovoljno dugo zadržati u pobuđenom stanju (oko 10^{-3} sekunda). Takvo stanje se naziva metastabilno stanje. Rezultat toga lančanog procesa je intenzivno koherentno elektromagnetsko zračenje koje zovemo lasersko zračenje.

Karakteristike laserskog zračenja:

- foton emitiran stimuliranom emisijom identičan je upadnom fotonu
- oba fotona imaju jednaku valnu duljinu – zračenje je monokromatsko
- oba fotona imaju isti smjer širenja – usmjerenost i paralelnost
- oba fotona imaju istu fazu – zračenje je koherentno.

To je i bitna razlika između spontane i stimulirane emisije.

Sredstvo u kojem se događa stimulirana emisija zovemo aktivno sredstvo, a ono mora imati atome koji se moraju pobuditi na prikladne više energijske razine, odnosno atome koji se mogu dovesti u stanje inverzne naseljenosti.

Stimulirana emisija predstavlja pojačavanje elektromagnetskog zračenja u kvantitativnom i kvalitativnom smislu.

Primjer 12.3.

Razmotrimo primjer iz svakodnevnog života, a to je žarulja s užarenom volframovom niti. Užarena nit predstavlja izvor obične bijele svjetlosti kod koje se energija dovodi, stručno se kaže pumpa, u atome volframa koji se dovode u pobuđeno stanje. Pobuđeni atomi teže se vratiti u osnovno stanje tako što spontano (bez vanjske prisile) emitiraju apsorbiranu energiju u vidu fotona, koji se emitiraju u svim mogućim smjerovima. Posljedica emitiranja fotona povratak je pobuđenih atoma u osnovno stanje. Emitirani fotoni nemaju nikakvu faznu ovisnost, a to znači da žarna nit emitira nekoherentnu bijelu svjetlost koju vidimo.

12.6. Načelo rada lasera

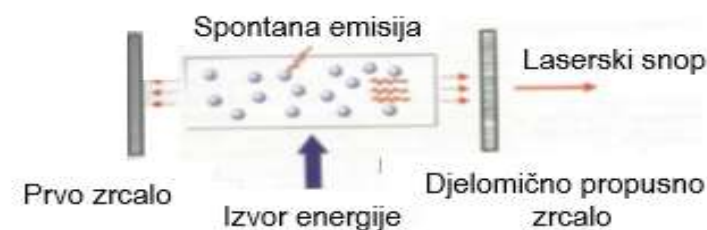
Za dobivanje laserskog zračenja moraju biti ispunjena tri uvjeta.

U aktivnom sredstvu mora biti više atoma koji mogu biti u pobuđenom stanju. Atomi moraju biti u stanju inverzne naseljenosti. U aktivnom sredstvu atomi se moraju nalaziti u metastabilnom stanju, tj. pobuđeno stanje mora trajati dovoljno dugo. Emitirani foton mora se u aktivnom sredstvu zadržati dovoljno dugo, kako bi mogao stimulirati emisiju fotona drugih pobuđenih atoma. Kao aktivno sredstvo koriste se razne vrste čvrstih tekućih i plinovitih materijala. Da bismo dobili inverznu naseljenost, energija se mora dovesti izvana. Načini na koje se energija dovodi izvana mogu biti:

Optičko pumpanje – energija koja se dovodi jest elektromagnetsko zračenje (fotoni) koje aktivni medij apsorbira. Izvori mogu biti bljeskalice punjene plinom (obično se koristi ksenon, ali i kripton i helij), drugi laser ili neki drugi izvor svjetlosti. Ovaj se način koristi u laserima s čvrstim ili tekućim aktivnim sredstvom.

Električno polje – dobije se iz istosmjernog visokonaponskog izvora, a koristi se kada je aktivno sredstvo plin. U cijevi s plinom ugrađene su dvije elektrode, katoda i anoda stanja. Kada se one priključe na izvor, iz katode izlaze elektroni, ubrzavaju se prema anodi i na tom se putu sudaraju s molekulama plina predajući im energiju. Na taj način atomi plina dolaze u neko od pobuđenih stanja.

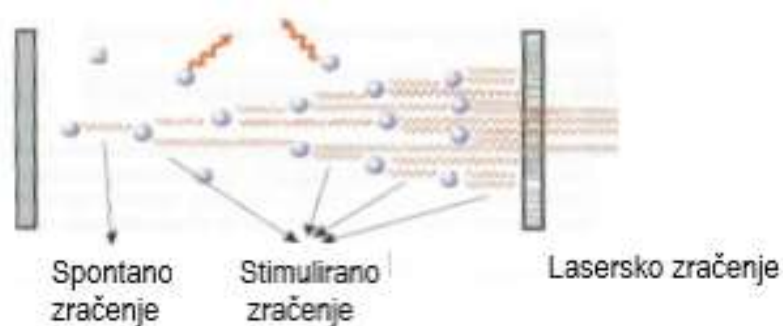
Električna struja – koristi se kada je aktivna tvar poluvodič (npr. poluvodička dioda). Višestrukim odbijanjem unutar aktivne tvari rješava se uvjet a) i b). To se postiže dvama paralelnim zrcalima, okrenutima jedno prema drugome. Jedno potpuno reflektira, a drugo je djelomično polupropusno i omogućuje da dio fotona izađe van. Dakle, tri su bitna dijela za rad lasera: aktivna tvar, energija i zrcala (slika 126).



Slika 126. Shematski prikaz lasera

Izvor energije dovodi atome u aktivnom sredstvu u pobuđeno stanje. Jedan od atoma brzo će se vratiti u osnovno energijsko stanje emitirajući foton energije $h\nu$.

Emitirani foton nalijeće na drugi atom u pobuđenom stanju, dogodit će se stimulirana emisija, kojom će se emitirati foton iste energije i iste faze, a gibaće se u istom smjeru kao i upadni foton. Ta dva fotona nalijeću na ostale pobuđene atome uzrokujući više stimuliranih emisija. Proces se nastavlja i broj fotona višestruko se povećava. Kada fotoni dođu do zrcala, reflektiraju se, gibaju se u suprotnom smjeru izazivajući na taj način dodatnu stimuliranu emisiju više atoma. Takvim gibanjem jedan dio fotona prođe kroz djelomično propusno zrcalo i izađe van u obliku uskog, strogo paralelnog koherentnog snopa laserskog zračenja, točno određene valne duljine (slika 127). Dio spontano emitiranih fotona izlazi izvan aktivnog sredstva i nije od značenja za rad lasera.



Slika 127. Načelo rada lasera

Laserska zraka se proizvodi pojavom stimulirane emisije. Prvi uvjet emisije fotona jest Bohrov uvjet: laserski medij mora sadržavati energijske razine čija energija (razlika energija) odgovara energiji emitiranih fotona. Drugi je uvjet da većina atoma (ili molekula) bude u pobuđenom stanju. Moramo imati na umu da se u laserskom mediju mogu događati različiti procesi međudjelovanja elektromagnetskog zračenja i materije: najviše dolaze do izražaja apsorpcija i spontana emisija zračenja. Ako dovedemo dio atoma (ili molekula) laserskog medija u pobuđeno stanje, oni će emitirati fotone spontanom emisijom. Ti se fotoni dalje mogu apsorbirati na nepobuđenim atomima ili izazvati stimuliranu emisiju na preostalim pobuđenim atomima. Laserska zraka se može proizvesti jedino ako stimulirana emisija dominira nad apsorpcijom i spontanom emisijom zračenja. To se postiže inverzijom napučenosti (inverzijom populacije) atoma u laserskom mediju: broj atoma u pobuđenom stanju mora biti veći od broja atoma u osnovnom stanju.

Inverzija napučenosti može se postići samo u posebnim slučajevima, pa se samo rijetke tvari mogu iskoristiti kao laserski mediji. Inverzija napučenosti može se postići ako u sustavu postoji metastabilno stanje. Metastabilno stanje je pobuđeno stanje u kojem se atom (ili molekula) zadržava puno dulje nego u normalnim pobuđenim stanjima. U laserskom mediju mora postojati barem još jedno pobuđeno stanje, što s osnovnim stanjem čini sustav od tri energijske razine – trostupanjski laser. U laserskom sustavu s trima razinama atomi (molekule) određenim se načinom pobuđuju u pobuđeno stanje. Pobuđeno stanje traje vrlo kratko i brzo se spušta

(relaksira) u nešto niže metastabilno stanje. Atomi (molekule) ne mogu se brzo relaksirati u osnovno stanje, pa laserskim medijem počinju dominirati atomi u metastabilnom stanju. Inverzija napučenosti postiže se između metastabilnog i osnovnog stanja, pa se lasersko djelovanje postiže prijelazom između tih dvaju stanja. Pobuđeno stanje koje se koristi za populiranje metastabilnog stanja ne mora biti jedno stanje, već se može koristiti niz energijskih stanja.

Postoje i laseri koji rade na principu četiriju razina – četverostupanjski laser. Metastabilno stanje napučuje se na isti način kao i kod trostupanjskog lasera, ali inverzija napučenosti postiže se između metastabilnog i drugog pobuđenog stanja niže energije. Kako se nisko ležeće pobuđeno stanje brzo relaksira i ostaje prazno, inverzija populacije zajamčena je čak i ako je pobuđen relativno mali broj atoma u laserskom mediju.

Inverzija napučenosti važna je za rad lasera. Povišenjem temperature pobuđena stanja počinju se populirati, što može narušiti inverziju populacije. Zagrijavanjem nije moguće postići inverziju populacije. Zbog toga je lasere često potrebno hladiti.

Laserski medij je smješten između dvaju paralelnih zrcala, tako da zrake svjetla koje prolaze između zrcala tvore stojni val. Prostor između dvaju zrcala naziva se i laserska šupljina, rezonantna šupljina ili rezonator, po analogiji sa šupljinama koje se koriste u akustici prilikom rada sa zvučnim valovima. Fotoni koji nastaju spontanom emisijom u laserskom mediju emitiraju se u svim smjerovima, ali će se samo oni koji su emitirani u smjeru zrcala reflektirati između dvaju zrcala i biti zarobljeni u laserskoj šupljini.

Ti će fotoni, koji velik broj puta prolaze kroz laserski medij, izazivati stimuliranu emisiju prilikom prolaska blizu atoma u metastabilnim stanjima u laserskom mediju. Stimuliranom emisijom nastaju skupine fotona koji su u istom kvantnom stanju. Takvi fotoni imaju istu valnu duljinu, smjer i usmjerenje i ponašaju se kao jedan foton. Jedno od dvaju zrcala obično se napravi tako da nije 100 % reflektirajuće, već propušta određenu količinu svjetla (obično manje od 1%), pa koherentni fotoni mogu izaći iz laserske šupljine. Kako se svi fotoni ponašaju kao jedan, izaći će ili svi (u skupini) ili nijedan. Na taj način laserska zraka sadrži skupine koherentnih fotona, što joj daje velik intenzitet (vidi potpoglavlje Građa lasera).

Laserska zraka jedan je od rijetkih primjera prikaza kvantne mehanike u makroskopskim sustavima. U kvantnoj mehanici razlikuju se dvije vrste čestica: Fermi-Diracove čestice – fermioni i Bose-Einsteinove čestice – bozoni. Fotoni se ponašaju kao bozoni. Fermioni ne mogu biti u istom kvantnom stanju, dok bozoni to mogu. Štoviše, što je više bozona u istom kvantnom stanju, veća je vjerojatnost da će im se pridružiti još njih.

12.7. Tipovi lasera

12.7.1. Podjela lasera

Po načinu rada razlikuju se neutralni atomski laseri, kod kojih spektralni prijelazi nastaju na neutralnim atomima, ionski laseri, kod kojih se koriste spektralni prijelazi na ioniziranim atomima plina, plinski molekularni laseri, koji rade u području molekularnoga spektra, laseri s Blumleinovom pobudom, kod kojih se na laserski plin djeluje izbojem pločastog kondenzatora

i time dobiva impulsno elektromagnetsko zračenje, plinsko-dinamički laseri, kod kojih inverzija populacije nastaje ekspanzijom vrućeg plina ili plazme kroz mlaznicu brzinom većom od brzine zvuka i dr. Po vrsti optički aktivne tvari laseri se dijele na plinske, tekućinske, poluvodičke i općenito lasere s čvrstim tvarima, na primjer staklo, prirodni ili umjetni kristali. Danas laseri pokrivaju valne duljine zračenja od dalekoga ultraljubičastoga pa sve do dalekoga infracrvenoga područja, a radi se i na konstrukciji lasera u području rendgenskog zračenja. Posebna su vrsta kemijski laseri, kod kojih se inverzija populacije postiže izravno ili neizravno za vrijeme egzotermne kemijske reakcije. Postoje i laseri (na primjer s titanijem dopiranim kristalom safira kao aktivnim medijem) koji mogu kontinuirano mijenjati valnu duljinu od 700 nm do 1000 nm, što se koristi u laserskoj spektroskopiji. Osim lasera koji zrače kontinuirano, konstruirani su i laseri koji zrače u kratkim impulsima trajanja od 10^{-16} do 10^{-9} sekunda, i time vrlo velike snage od nekoliko petavata (10^{15} W) u pulsu.

12.7.2. Pulsni laseri

Umjesto jednog nepropusnog i jednog slabo propusnog zrcala moguće je koristiti potpuno neprozirna zrcala, od kojih se jedno periodički pomiče izvan optičkog puta lasera. Kada je zrcalo na svojem mjestu, ono zarobljava lasersku zraku unutar rezonatora, gdje se ona pojačava zahvaljujući stimuliranoj emisiji zračenja. Kada se zrcalo ukloni, iz lasera izlazi kratki puls intenzivnog laserskog zračenja. Pulsovi se kod lasera mogu proizvesti i stavljanjem određenog bojila u rezonator.

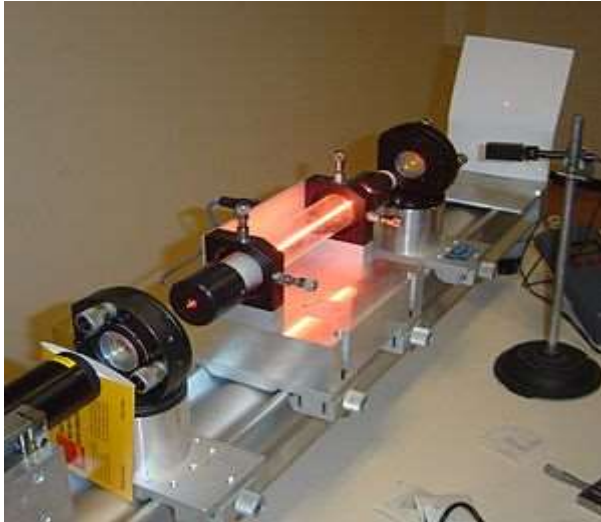
Bojila apsorbiraju zračenje zahvaljujući apsorpciji zračenja, pri čemu se molekule bojila pobuđuju u pobuđeno stanje. Kada su sve molekule pobuđene, više ne mogu apsorbirati, pa propuštaju zračenje. Na taj se način sprječava prolazak fotona kroz lasersku cijev, dok se uspostavi potpuna (ili gotovo potpuna) inverzija napučenosti u laserskom mediju. Laserski medij se na taj način puni energijom do trenutka kada bojilo postaje prozirno. U tom trenutku energija pohranjena u laserskom mediju pretvara se u lasersku zraku. Takvi načini proizvodnje laserskih pulsova nazivaju se Q-prekidanje (engl. *Q-switching*). Ako se rezonator pažljivo izradi, moguće je u rezonatoru zarobiti određen broj valnih duljina laserskog zračenja. U tom slučaju laser će početi pulsirati u vrlo kratkim pulsovima – čak i u trajanju od oko jedne femtosekunde (u jednoj sekundi ima toliko femtosekunda koliko ima sekunda u 30 000 godina). Pulsni laseri mogu postići jako velike snage u pojedinim pulsovima iako je prosječna snaga lasera relativno mala. Danas se mogu napraviti laseri koji odašilju 20 – 50 pulsova u sekundi, a pojedini pulsovi traju oko jedne femtosekunde. To znači da će se energija, koja bi se oslobodila tijekom jedne sekunde, osloboditi u dvadesetak vrlo kratkih pulsova.

12.7.3. Laseri s čvrstom jezgrom

Laseri s čvrstom jezgrom imaju jezgru, napravljenu od kristala ili amorfnе tvari, često u obliku štapića. Zrcala mogu biti tanki slojevi srebra napareni na krajeve štapića. Na taj način štapić čini lasersku šupljinu. Pobuđivanje atoma od kojeg se sastoji jezgra obično se provodi nekim snažnim izvorom svjetla. U tu svrhu često se koriste ksenonske bljeskalice, a u novije vrijeme LED diode ili poluvodički laseri, čime se povećava energetska učinkovitost lasera. Prvi laser koji je davao vidljivu svjetlost bio je rubinski laser. Rubinski laser ima štapić od rubina kao lasersku jezgru. Rubinski laser daje crvenu svjetlost valne duljine 694,3 nm.

Danas se često koristi Nd:YAG laser, koji se sastoji od štapića itrij-alumijeva granata (YAG), dopiranoga atomima neodimija. Nd:YAG daje infracrveno zračenje.

12.7.4. Plinski laseri



Slika 128. Helij-neon laser

Plinski laseri imaju laserski medij u plinovitom stanju. Plinski laseri se obično sastoje od cijevi ispunjene plinom ili smjesom plinova pod određenim tlakom. Krajevi cijevi opremljeni su zrcalima kako bi tvorili lasersku šupljinu. Pobuđivanje atoma plina obavlja se električnim pražnjenjima kroz plin u cijevi. Plinski laseri se često hlade strujanjem plina kroz cijev. Najčešće korišteni plinski laseri su He-Ne laser (helij-neon), argonski laser ili CO₂ laser.

12.7.5. Poluvodički laseri

Poluvodički laser ili diodni laser predstavlja sićušni kristal, proizveden s atomskom točnošću, podijeljen u dva osnovna područja, s različitim električnim svojstvima. Na takozvanoj n-strani višak elektrona predstavlja nosioce struje. Na takozvanoj p-strani prevladavaju šupljine koje predstavljaju nedostatak elektrona. Kad se na p-stranu primijeni pozitivan napon, a na n-stranu negativan, elektroni i praznine poteknu jedni prema drugima. Čestice se sretnu u ultratankom prostoru koji se naziva kvantna jama, gdje se rekombiniraju, pri čemu dolazi do emisije fotona. Ako su krajevi diode ujedno i visoko reflektirajuća zrcala, dolazi do laserskog učinka, emitiranja istovrsnih koherentnih fotona. Energija fotona (boja svjetlosti) određena je svojstvima poluvodičkog spoja, iznosom energijskog rascjepa (engl. *Band-gap*). Npr. za GaAs lasere energijski rascjep iznosi 1,45 eV, što odgovara emisiji fotona valne duljine 885 nm. Plavi laser je pojam koji označuje poluvodičke lasere u području 400 – 450 nm, a čije bi ostvarenje predstavljalo značajan napredak u razvoju laserskih displeja i povećanju kapaciteta optičkih memorija.

12.7.6. Kemijski laseri

Određene kemijske reakcije mogu proizvesti molekule u pobuđenom stanju. Kemijski laseri iskorištavaju takve reakcije kako bi se postigla inverzija napučenosti. Primjer je fluorovodični laser koji iskorištava reakciju vodika i fluora za proizvodnju fluorovodika u pobuđenom stanju. Laserska zraka nastaje u reakcijskoj komori, u koju stalno dotječu reaktanti, a produkti izlaze van. Na taj je način postignuta inverzija napučenosti, jer je u reakcijskoj komori stalno prisutno

više pobuđenih molekula od onih u osnovnom stanju. Takvi laseri mogu postići jako veliku snagu u kontinuiranom modu.

Jedna vrsta kemijskih lasera upotrebljava ekscimere. Ekscimer je molekula koja je stabilna samo u pobuđenom stanju. Laser se sastoji od smjese plinova kroz koje se provede visoki napon, slično kao kod plinskih lasera. Električna struja stvara mnoštvo iona i pobuđenih atoma u laserskoj šupljini, koji mogu reagirati i stvoriti ekscimer. Nakon što ekscimer doživi laserski prijelaz, on se raspada jer ne može postojati u osnovnom stanju. To je i razlog inverzije napućenosti u ovom laserskom mediju.

Laser s bojilom rodamin G5 pobuđuje se s pomoću argonskog lasera pri 514 nm (zeleno), a ugođen je na 580 nm (žuto-narančasto).

12.7.7. Laseri s bojilima

Lasери s bojilima iskorištavaju određene organske spojeve koji služe kao aktivni laserski medij. Molekule, za razliku od atoma, imaju vrpčaste spektre koji se sastoje od mnogo spektralnih linija. Kod ovih se spojeva energijskim razinama može manipulirati (električnim poljem, magnetskim poljem, temperaturom). Na taj način moguće je ugoditi laser na određenu valnu duljinu. Pobuda molekula obavlja se s pomoću nekog drugog lasera.

12.7.8. Laseri sa slobodnim elektronima

Laseri sa slobodnim elektronima koriste se snopom relativističkih elektrona koji prolazi kroz magnetsko polje koje naizmjenično mijenja smjer duž puta elektrona. U normalnim okolnostima relativistički elektroni, koji prolaze kroz magnetsko polje, emitiraju sinkrotronsko zračenje. Kod lasera sa slobodnim elektronima put koji elektroni prolaze između naizmjenično postavljenih magneta stavlja se u lasersku šupljinu, tako da fotoni, koji su uhvaćeni između zrcala, izazivaju stimuliranu emisiju slobodnih elektrona u magnetskom polju, kao i kod elektrona u pobuđenim atomima. Laseri sa slobodnim elektronima mogu se ugadati promjenom gustoće rasporeda magneta, jakosti njihova magnetskog polja i promjenom energije elektrona. Tako se mogu napraviti i laseri sa slobodnim elektronima koji rade na valnim duljinama koje su nedostupne klasičnim laserima, jer ne postoji pogodan laserski medij koji bi mogao proizvesti zadanu valnu duljinu. Moguće je napraviti i laser s jako dugačkom laserskom šupljinom, bez zrcala, čiji fotoni onda ne bi trebali prolaziti velik broj puta duž optičkog puta lasera, već bi prošli samo jedanput. Takav laser se naziva superradijantni laser. Danas se pokušavaju napraviti superradijantni laseri sa slobodnim elektronima, koji bi radili u spektralnim područjima, u kojima ne postoje zrcala kojima bi se to zračenje reflektiralo, na primjer u rendgenskom području.

12.8. Primjena lasera

Mnogobrojne su primjene lasera u svakodnevnoj primjeni: optički zapis informacija – CD, laserski pisač, skener, kreditne kartice, zdravstvene iskaznice, telefonske kartice, u telekomunikacijama itd.

Primjena u industriji: precizna mjerenja udaljenosti interferometrija, obrada materijala spektralna analiza itd.

Primjena u medicini: kirurgija, dijagnostika itd.

Primjena u znanosti: spektroskopija, laserska fuzija proučavanje međudjelovanja elektromagnetskog zračenja i tvari, meteorološka istraživanja itd.

Laseri se koriste u spektroskopiji kao intenzivni izvori monokromatičnog svjetla. Najčešće se koriste argonski laser u Ramanovoj spektroskopiji i laseri s bojilima u spektroskopiji visokog razlučivanja. He-Ne laseri se koriste u Michaelsonovim interferometrima za precizno mjerenje položaja zrcala.

Pulsni laseri se koriste za proučavanje super-brzih procesa. U femtosekundnoj spektroskopiji na objekt proučavanja istovremeno se pošalju dvije laserske zrake iz pulsnog lasera vrlo kratkog pulsa. Jedna zraka se pošalje direktno na uzorak, a drugoj se poveća put za nekoliko centimetara s pomoću zgodno postavljenih zrcala. Ta zraka će zakasniti za nekoliko femtosekunda, jer je svjetlosti potrebno određeno vrijeme da prijeđe taj put. Prva laserska zraka (engl. *Pump Pulse*) uzrokovat će reakciju u uzorku, a drugom se (engl. *Probe Pulse*) može gledati što se u tom trenutku događa u uzorku.

Pomicanjem zrcala moguće je kontrolirati kašnjenje druge laserske zrake i tako dobiti sliku o procesu unutar uzorka. Na taj se način istražuju najbrže kemijske reakcije u prirodi.

Jako veliki laseri koriste se za istraživanja materije u uvjetima ekstremnih tlakova i temperatura. S pomoću takvih lasera moguće je provesti nuklearnu fuziju na malenim količinama vodika. Takvi laseri su najčešće kruti laseri s jezgrom napravljenom od stakla u koje su stavljene određene tvari koje služe kao aktivni laserski medij.

12.9. Flouescencija

12.9.1. Luminiscencija – hladno zračenje

Luminiscencija je pojava emisije svjetlosti koja nije direktan rezultat zagrijavanja materijala. Može biti izazvana na različite načine, a zapaža se na materijalima.

Luminiscencija je emisija elektromagnetskog zračenja (pretežito vidljive svjetlosti, ali i ultraljubičastog i infracrvenog zračenja) koje nije pobuđeno toplinskim (termičkim) procesom i povišenom temperaturom tvari, nego je posljedica primanja energije u nekom drugom obliku. Po tome se razlikuje više oblika luminiscencije: bioluminiscencija, elektroluminiscencija, radioluminiscencija (posljedica djelovanja ionizirajućeg zračenja), triboluminiscencija (nastaje prilikom lomljenja nekih kristala), luminiscencija trenja, kemijska luminiscencija ili kemiluminiscencija (nastaje u vezi s kemijskim promjenama u nekim tvarima), kristaloluminiscencija (nastupa kod kristalizacije nekih tvari), termoluminiscencija (nastaje zagrijavanjem nekih tvari, ali samo ako su prije toga bile izložene nekom zračenju, na primjer ionizirajućemu zračenju), fotoluminiscencija (posljedica obasjavanja određenih tvari svjetlošću svih valnih duljina).

Tvar luminiscira kada se primanjem energije jednim od navedenih načina elektroni u atomu prvo pobude u više energetske stanje, a zatim se emisijom dijela ili ukupne primljene energije

u obliku zračenja vraćaju u osnovno stanje. Ako se luminiscencija pojavljuje za trajanja pobude ili najviše 10^{-8} sekunda nakon toga, riječ je o fluorescenciji, a opaža li se luminiscencija i nakon što pobuda prestane, govori se o fosforescenciji. Dakle, luminiscenciju dijelimo na više oblika luminiscencije i to:

Prema načinu pobuđivanja:

- Fotoluminescencija
- Radioluminescencija
- Katodoluminescencija
- Elektroluminescencija
- Hemiluminescencija
- Bioluminescencija
- Sonoluminescencija
- Triboluminescencija

Prema dužini trajanja:

- Fluorescencija ($t < 10^{-4}$ s)
- Fosforescencija ($t > 10^{-4}$ s)

Fluorescencija je zračenje svjetlosti za vrijeme osvjetljavanja. Mnoge tvari, na primjer petrolej, barijev platincijanir i druge, same svijetle kad na njih pada svjetlost. Da njihova svjetlost nije obična refleksija (odbijanje), vidi se iz toga što svaka kemijska tvar koja je osvijetljena homogenom svjetlosti svijetli drugom bojom. Tako petrolej, osvijetljen bijelom svjetlosti, svijetli plavičastom svjetlosti, a otopina klorofila u alkoholu crvenom svjetlosti. Pobuđena svjetlost dulje je valne duljine (Stokesov pomak), najviše jednake pobudnom zračenju. Poput ostalih vrsta luminiscencije, fluorescenciju pokazuju samo određeni materijali.

Najčešća je fluorescentna tvar, koja se rabi za unutarnji premaz fluorescentne cijevi, kalcijev fluorofosfat ($3\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2 \cdot \text{CaF}_2 \cdot \text{Sb} \cdot \text{Mn}$), jer pobuđen ultraljubičastim zračenjem zrači u vidljivome području. U svim slučajevima fluorescencije tijelo zrači energiju na račun apsorbirane energije zračenja, pa su valovi koji se emitiraju pri luminiscenciji većinom većih valnih duljina od apsorbiranih valova koji izazivaju luminiscenciju. To se potpuno slaže s kvantnom teorijom svjetlosti, jer tijelo apsorbira kvant svjetlosti (foton) $h \cdot \nu$ pa može emitirati ili tu čitavu energiju ili samo dio te energije, a u tom slučaju frekvencija ν mora biti manja. Nevidljive ultraljubičaste zrake primjećujemo jer izazivaju fluorescenciju.

13. Dodatak za laboratorijske vježbe

13.1. CoachLab II+

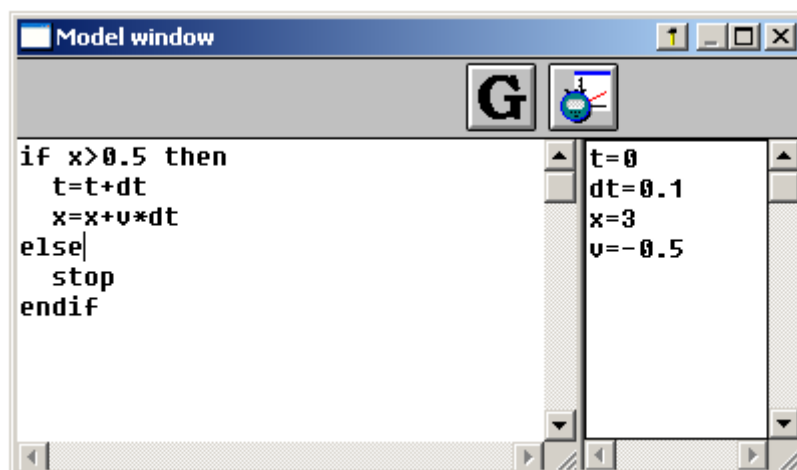
CoachLab II+ je multifunkcionalno sučelje koje povezuje senzore s računalom i služi za mjerenje različitih veličina. Uređaj je *online* spojen i prikazuje realno vrijeme na zaslonu računala. CoachLab II+ s računalom je povezan preko USB kabela i ima vlastiti adapter za napajanje. Na sučelje se može spojiti uzorak do šest senzora istovremeno, kod mjerenja na jednom kanalu može se uzeti od 100 000 uzoraka u sekundi. Operacijski sustavi kao što su

Microsoft Windows imaju velik nedostatak tog "stvarnog vremena". Mjerenja mogu biti prekinuta u bilo koje vrijeme za vrlo kratko razdoblje zbog drugih zadataka koje operacijski sustav mora obavljati (*multitasking*). Ovo je osobito problem s visokim frekvencijama uzoraka. To se može riješiti odvojenim mikrokontrolorom i pohranjivanjem podataka u memoriju sučelja. Ova se tehnologija koristi u uređaju CoachLab II+, tako da on ima svoj procesor i memoriju. Kada softver šalje mjernu naredbu uređaju CoachLab II+, ona nosi samostalno mjerenje i pohranjuje podatke u lokalnu memoriju. Podatci su poslani na računalo preko USB priključka. Ako je ovaj postupak prekinut drugim zadaćama operativnog sustava, podatci se ne gube, nego se pojavljuju samo malo kasnije na ekranu.



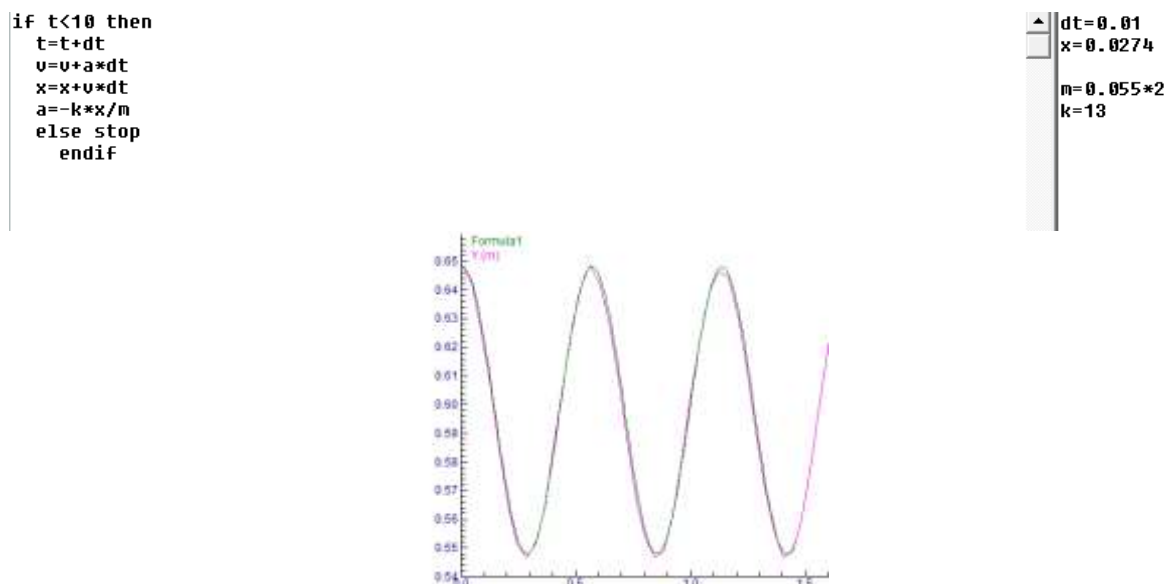
Slika 129. Uređaj CoachLab II+

Na ulaze uređaja CoachLab II+ mogu se spojiti analogni i digitalni senzori. Za korištenje uređaja CoachLab II+ s računalom potreban je softver. Nakon što je softver instaliran na računalo, može se krenuti s mjerenjem fizikalnih veličina u realnom vremenu s pomoću potrebnih senzora. U kolegiju Fizika odrađuje se šest vježba s CoachLab II+ uređajem. Studenti za početak naprave mjerenje i nakon toga analiziraju mjerenje u dijelu programa koji se zove modeliranje. Prilikom modeliranja kakva eksperimenta potreban je i kod koji je poznat (slika 130).



Slika 130. Kod u programu CoachLab II+ prilikom modeliranja eksperimenta "Mjerenje položaja i brzine"

Cilj vježba u CoachLab II+ jest pronaći vrijednosti brzine objekta, konstante opruge, konstante otpora zraka, vrijednost početne brzine pri vertikalnom hitcu i dr. Cilj je sve te vrijednosti dobiti bez uvrštavanja u formule, odnosno ne analitički, već preko fitanja (usklađivanja grafova) funkcija. Na slici 131 vidi se kod u programu potreban da se dobije funkcija slična funkciji dobivenoj mjerenjem, s desne strane koda mijenjaju se parametri dok se funkcije ne preklope. Kada se funkcije preklope, dobiveni parametri, kao što su brzina, konstanta opruge i dr., stvarne su vrijednosti.



Slika 131. Graf i program za određivanje konstante opruge

13.2. Logger Pro

Vernier LabQuest 2 (Logger Pro) samostalno je sučelje koje se koristi za prikupljanje podataka s pomoću senzora i aplikacije za grafički prikaz i analizu. Velik zaslon visoke razlučivosti olakšava i intuitivno prikupljanje, analiziranje i dijeljenje podataka iz eksperimenata. Za razliku

od CoachLab II+ u ovom se programu ne treba unositi kod da bismo fitali funkcije, već se unosi duljina trajanja mjerenja i što se mjeri. Nakon toga sam uređaj na koji je spojen osjetnik „zna“ što treba mjeriti u tom trenutku. Na uređaju LabQuest 2 u kolegiju Fizika odrađuje se pet vježba.

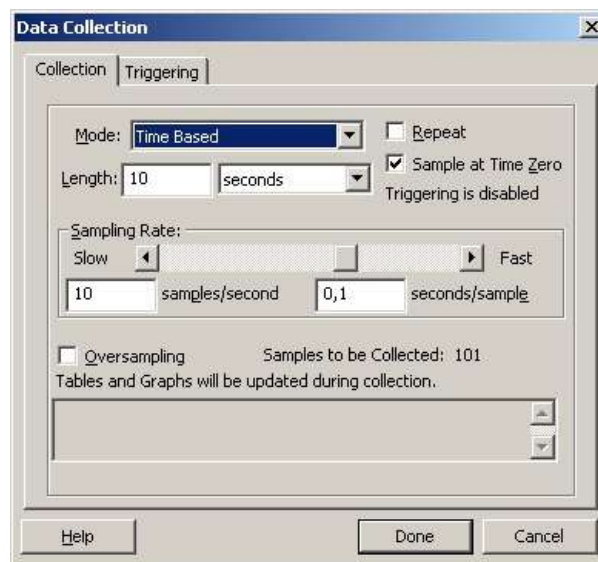
Prikupljanje podataka vrši se na sljedeći način:

Na početku mjerenja potrebno je odrediti trajanje mjerenja i broj prikupljenih uzoraka. Pritiskom na ikonu **Data Collection** (slika 132) otvara se prozor kojim se određuje način prikupljanja podataka:

Mode – način prikupljanja podataka

Length – trajanje mjerenja

Sampling rate – određuje broj prikupljenih uzoraka u jedinici vremena.



Slika 132. Prozor za postavke mjerenja u programu Logger Pro

Obratite pažnju na poruke koje iskaču (*tool tips*) kada se strelica miša postavi iznad neke od ikona – tako možete dobiti dodatne informacije o ikoni.

U *toolbaru* programa vidljive su sljedeće ikone, klikom na njih uključuje se zadana radnja:

New – stvara novu Logger Pro datoteku.

Open – otvara postojeću datoteku. Logger Pro sadrži velik broj datoteka koje pomažu prikupiti i analizirati podatke.

Save – sprema tekuću datoteku.

Print – ispisuje dokument.

Previous Page – Logger Pro dokumenti mogu sadržavati višestruke stranice. *Previous Page* dugme vraća prethodnu stranicu. Desno od dugmeta *Previous Page* nalazi se padajuća lista koja omogućuje izravan prijelaz na željenu stranicu.

Next Page – prikazuje sljedeću stranicu.

Show/Hide Data Browser – *Data Browser* je spremnik svih podataka koje Logger Pro prikupi za vrijeme rada.

Import from TI Device – omogućuje uvoz podataka.

Autoscale – pruža brz način skaliranja grafa i prilagođivanja prikaza podataka. Graf ispod prikazuje temperaturu. Kliknite *Autoscale* dugme i uočite kako to mijenja graf.

Zoom In (+) – zumira dio grafa. Mišem kliknete i povlačite dio grafa koji želite povećati pa kliknete *Zoom In* dugme.

Zoom Out (-) – umanjuje prikaz grafa.

Examine – otvara prozorčić kojim očitavamo vrijednosti na grafu.

Tangent – crta tangentu na podatke na grafu. Tangenta se pomiče kako se pomiče kursor.

Statistics – prikazuje statističke informacije o podacima s grafa (odnose se na označeni dio).

Integral – računa integral (površinu) označenog područja.

Linear Fit – *Linear Fit* dugme fita (ugađa) linearnu funkciju ($y = mx + b$) na odabrano područje grafa ili na cijeli graf.

Curve Fit – otvara prozor za odabir funkcije kojom želimo fitati podatke.

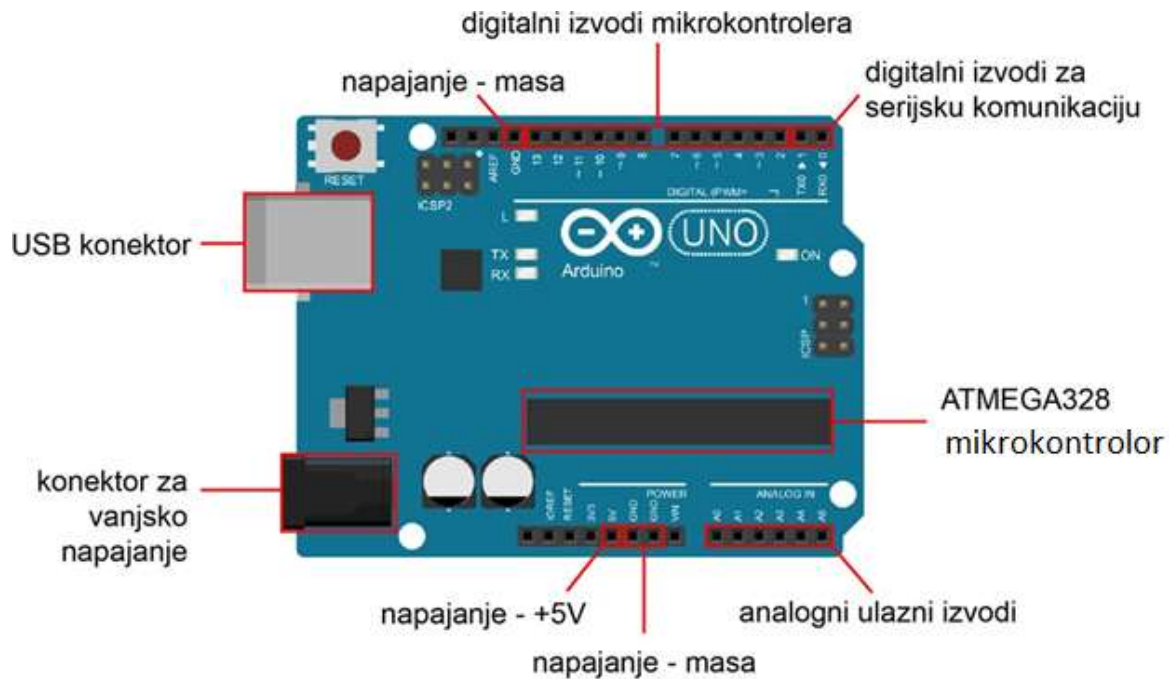
13.3. Arduino

Arduino je ime za otvorenu računalnu i softversku platformu koja omogućuje konstruiranje uređaja i naprava s ciljem povezivanja računala. Srce Arduina su mikrokontrolori. Mikrokontrolor je malo računalo sadržano na jednom integriranom sklopu. Arduino najčešće rabi 8-bitne mikrokontrolore koje proizvodi tvrtka Amtel. Mikrokontrolor možemo zamisliti kao crnu kutiju koja ima određen broj izvoda kojima je moguće upravljati s pomoću programa koji korisnik napiše na računalu i koji se onda izvršava na samom mikrokontroloru (slika 133).

Programiranje Arduino mikrokontrolora izvodi se u programskom okruženju Arduino IDE, a program se besplatno preuzima s adrese: <http://arduino.cc/en/main/software>.

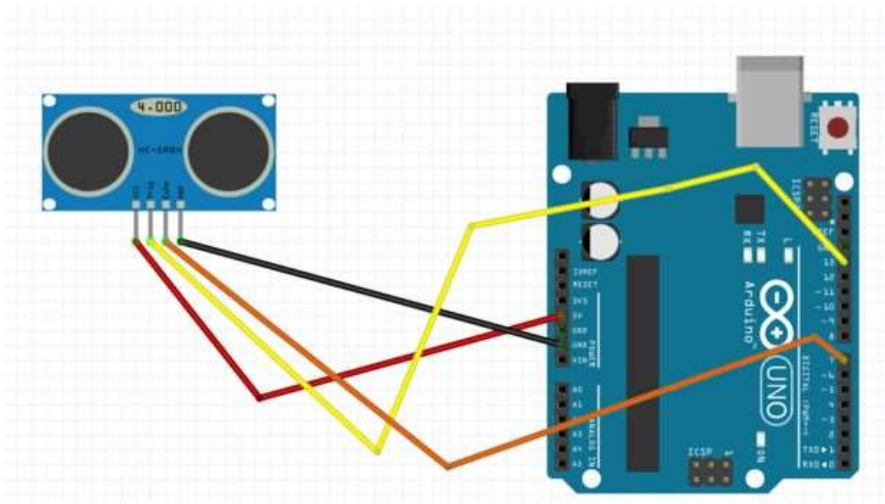
Kako bi se napisane programe moglo prebaciti u mikrokontrolor, na Arduino pločici nalazi se USB veza s računalom. Ako se koristi Arduino standardna pločica koja nije neka nova

kompatibilna platforma, nije potrebna dodatna instalacija drivera. Ne postoji programski jezik koji je određen za Arduino, jer je krajnji izvršni program koji se učitava na pločicu u binarnom strojnom jeziku i sav se rad pretvaranja iz programskog jezika u binarni kod vrši programom prevoditeljem. Mnogi Arduino programi napisani su inačicama programskog jezika C ili C++ koje rabe biblioteku rutina što su ih s vremenom razvili mnogi korisnici.



Slika 133. Arduino

Na Arduino se spajaju različiti senzori za mjerenje različitih veličina. U kolegiju Fizika koristit će se ultrazvučni senzor HC-SR04 (slika 134) koji ima dva pretvornika: jedan služi kao zvučnik (Z) koji pretvara električne impulse u zvučne valove i emitira ih frekvencijom od 40 000 Hz (40 kHz), a drugi djeluje kao mikروفon (M) za prijem ultrazvučnog vala koji se reflektira (odbija) od tijela (T). Satni mehanizam bilježi vrijeme od trenutka kada je uređaj poslao ultrazvučni impuls, a zaustavlja se kada mikروفon primi odbijeni impuls od nekog tijela. Tako dobiveno vrijeme je vrijeme potrebno da se zvuk od osjetnika proširi do tijela i vrati ponovno do osjetnika.



Slika 134. Spajanje ultrazvučnog senzora na Arduino

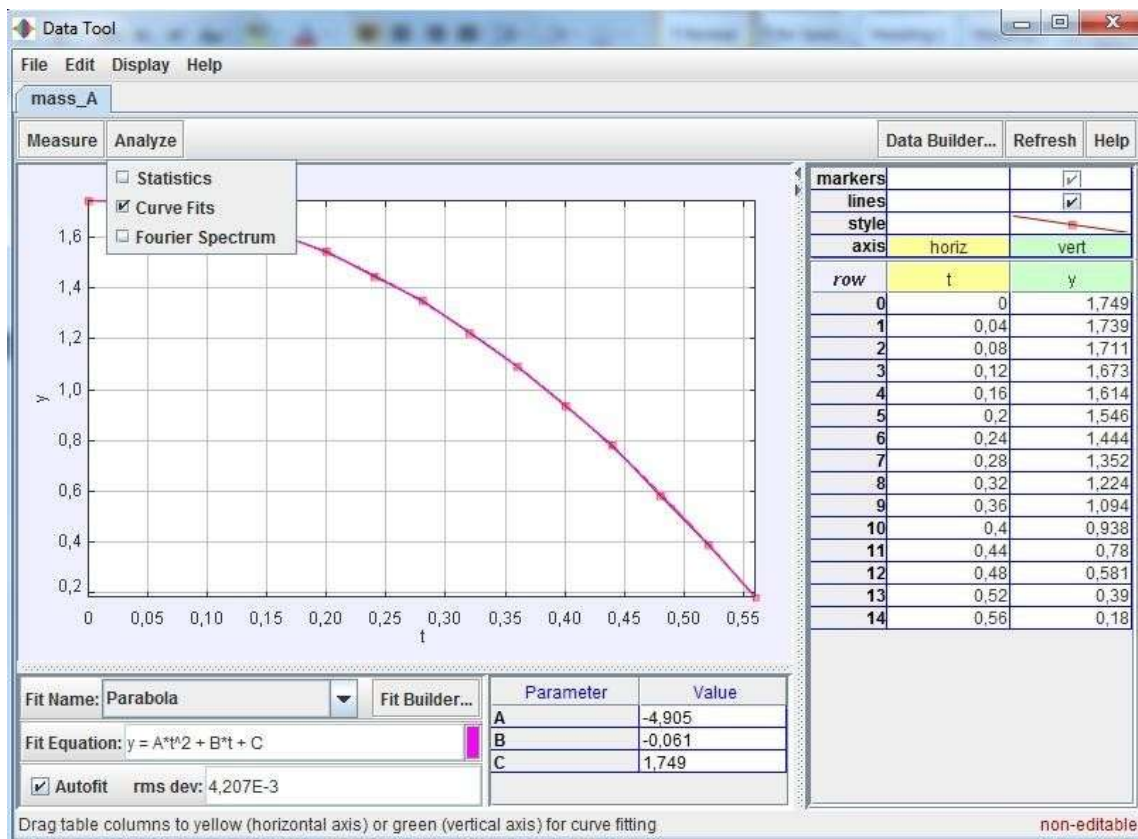
13.4. Tracker

Tracker je besplatan alat za analizu videa i modeliranje koji se temelji na Java okviru Open Source Physics (OSP). Osmišljen je za korištenje u poučavanju fizike. Modeliranje videa snažan je način kombiniranja videozapisa s računalnim modeliranjem. U kolegiju Fizika u jednoj laboratorijskoj vježbi analizira se gibanje lopte i bicikla te se iz zadanog gibanja računaju brzina i akceleracija. Studenti prilagođuju program nekakvoj realnoj situaciji, tako da kalibriraju veličinu iz videa sa stvarnom veličinom (slika 135 i 136).



Slika 135. Kalibriranje duljine označeno je bijelom strelicom

Nakon kalibracije studenti obrađuju snimku, a mjerenje se prikazuje tablično i grafički.



Slika 136. Analiziranje gibanja grafički i tablično

14. Literatura

- Cindro, N. (1985) *Fizika 1: mehanika-valovi-toplina*, 3. izdanje, Zagreb: Školska knjiga
- Cindro, N. (1988) *Fizika 2: Elektricitet i magnetizam*, 2. izdanje, Zagreb: Školska knjiga
- Barčan, A. i Burnik, K. (n.d.) *Kolika je duljina britanske obale*, dostupno na: [http://www.mathos.unios.hr/ppt > fraktali](http://www.mathos.unios.hr/ppt/fraktali) (posjećeno 3. srpnja 2017.)
- Halliday, D., Resnick, R. i Walker, J. (2014) *Fundamentals of Physics*, 10. izdanje, USA: Willey
- Labinac, V., Milotić, B. (2021) *Fizika III: Valovi i optika (online)*, dostupno na: https://www.phy.uniri.hr/~vlabinac/files/index/skripte/valopt_pregled.pdf (posjećeno 6. rujna 2017.)
- Luketin I. (n.d.) *Fizika*, Module: SRC102, Fizika u računalstvu (online), dostupno na: https://moodle.oss.unist.hr/pluginfile.php/28930/mod_resource/content/1/predavanja.pdf (posjećeno 10. listopada 2017.)
- Marić, S. (2002) *Fizika: za studente tehničkih fakulteta*, Sarajevo: IP "Svjetlost" d. d.
- Puljiz Z. (n.d.) *Fraktalne dimenzije (online ppt)* (preuzeto 3. srpnja 2017.)
- Zaklada Wikimedija (2003) *Vektor (online)*, dostupno na: <https://hr.wikipedia.org/wiki/Vektor> (posjećeno 10. srpnja 2020.)